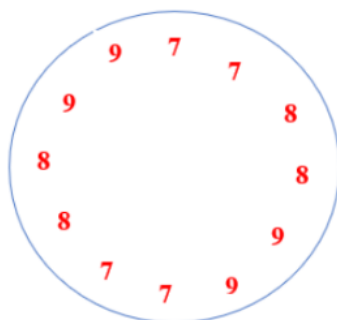


Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования
Псковской области «ЛИДЕР»
Структурное подразделение «Одарённые дети»
Областной конкурс «Юные дарования» 2023/2024
«Юный знаток математики»
Заочный тур
8 класс

8.1. На столе лежат шары, на каждом из которых написано некоторое число. Маше нужно расставить шары по кругу так, чтобы сумма чисел на любых трех подряд стоящих шарах не делилась на три. Сможет ли Маша расставить так четыре шара с числом 7, четыре шара с числом 8 и четыре шара с числом 9?

Ответ: Сможет

У нас есть 12 чисел: 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, которые нужно расставить по кругу так, чтобы сумма любых трёх подряд стоящих чисел не делилась на 3. Если брать 3 одинаковые числа, например, 7, 7, 7 (8, 8, 8, или 9, 9, 9), то сумма будет делиться на 3. Если брать разные три числа 7, 8, 9, то сумма будет делиться на 3 ($7+8+9=24$). Но если брать числа по три таким образом, чтобы были два одинаковых и одно другое, то они в сумме дают число, которое на 3 не делится. Тогда числа можно расставить таким образом, например:



8.2. Два различных числа x и y таковы, что

$$x^2 - 2023x + 2022 = y^2 - 2023y + 2022.$$

Найдите сумму чисел x и y .

Ответ: 2023

$$\begin{aligned} x^2 - 2023x + 2022 = y^2 - 2023y + 2022 &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 2023(x - y) \\ &\Leftrightarrow x + y = 2023 \end{aligned}$$

8.3. На доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается стереть два числа a и b и записать вместо них числа $\frac{3a-b}{2}$ и $\frac{3b-a}{2}$. Можно ли за несколько таких операций получить числа 7, 8, 9?

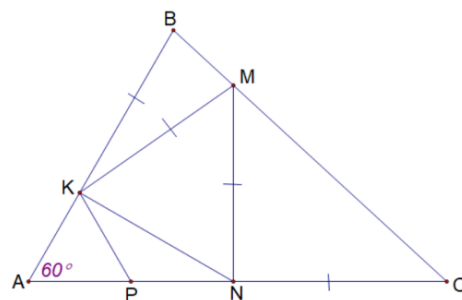
Ответ: нет

Инвариантом в этой задаче является сумма всех написанных на доске чисел, так как $a + b = \frac{3a-b}{2} + \frac{3b-a}{2}$. А так как $4 + 5 + 6 \neq 7 + 8 + 9$, то с помощью разрешенных операций добиться желаемого не получится.

8.4. Дан треугольник ABC с углом A равным 60° . Точки M, N, K лежат на сторонах BC, AC, AB соответственно, причем $BK = KM = MN = NC$. При этом оказалось, что $AN = 2AK$. Докажите, что отрезок MN перпендикулярен AC .

Пусть P – середина отрезка AN , тогда $AP = AK$, а угол $A = 60^\circ$ (по условию), следовательно, треугольник KAP равносторонний, откуда $KP = PN$,

$\angle KPN = 120^\circ$, следовательно, $\angle PNM = 30^\circ$.



Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle ABC = 120^\circ - \alpha$, откуда $\angle KMN = 180^\circ - \angle KMB - \angle NMC = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) - \alpha = 60^\circ$. Получаем, что треугольник KMN – равносторонний и $\angle KNM = 60^\circ$. Следовательно, $\angle ANM = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

8.5. На плоскости нарисованы горизонтальные и вертикальные отрезки трёх цветов, причём никакие два не лежат на одной прямой. Оказалось, что любой красный пересекает не менее 3 зелёных, любой зелёный пересекает не менее 3 синих, а любой синий пересекает не менее 3 красных. Какое наименьшее количество отрезков может быть нарисовано на плоскости?

Ответ: 18 отрезков

Заметим, что если есть вертикальный красный отрезок, то есть пересекающий его горизонтальный зелёный, тогда есть вертикальный синий, а тогда есть горизонтальный красный. Таким образом, каждого цвета есть хотя бы один вертикальный и хотя бы один горизонтальный отрезок. А тогда найдется не менее трех отрезков каждого цвета и каждого направления, то есть отрезков не менее 18.

Пример устроен следующим образом: возьмем 9 горизонтальных отрезков, по три каждого цвета и 9 вертикальных отрезков по три каждого цвета и расположим их так, чтобы любые два отрезка разных направлений пересекались