10.1 – 7б., 10.2 – 7б., 10.3 – 7б., 10.4 – 0б., 10.5 – 0б.
Сумма 21б.

ЗАДАЧА № 10. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М – 10 – 01 – 1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Обозначим числа за: $k-2; k-1; k; k+1; k+2; k+3$.

Пусть $a = k$; $b = k-2$; $c = k+2$; $d = k+1$; $e = k-1$; $f = k+3$, тогда выражение принимает вид:

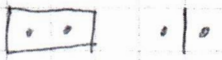
$$\frac{k}{(k-2)+(k+2)} + \frac{k+1}{(k-1)+(k+3)} = \frac{k}{2k} + \frac{k+1}{2k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Следовательно, так обозначить числа возможно.

ч.т.д.

7 баллов

Рассмотрим фигуры Даши и Саши на доске:



Обе фигуры охватывают две ~~рядом стоящие~~ соседние клетки. Тогда в итоге у Саши будет ~~Рассмотрим~~ одна перекрытая дважды клетка (если будет дважды перекрыто больше, то суммарное кол-во перекрытых хотя бы раз клеток $\leq 41\cdot 2-2=80\leq 81$.)

Рассмотрим те 40 ходов Саши, которые не перекрывают дважды одну клетку. На этот момент будет перекрыто $40\cdot 2=80$ клеток $\Rightarrow$ не будет перекрыто ~~81~~ $9\cdot 9-80=1$ клетка, а так как перегородки в таком случае идентичны клеткам, то способов такой расстановки тоже D. Так как у свободной клетки ~~4 своб~~ не более 4-х свободных сторон, ~~да~~ то для 41-го „хода" есть не более 4-х вариантов, в каждом из которых одна клетка перекроется дважды. Если с перекрытой дважды клетки снять другую перегородку, то получится другая расстановка на 40-й „ход". Значит, при таком пересчёте ~~какая-то~~ расстановки повторяются дважды. ?

ЗАДАЧА № 10. 2	ЛИСТ 2 ИЗ 2	M-10-01-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Если у ~~кл~~ свободной клетки не больше 4-х свобод-ных для перегородки сторон и все расстановки повто-ряются дважды при таком пересчёте, а не 4-х ход" у Сани D расстановок, то $S \leq \frac{4D}{2} = 2D$

ч.т.д.

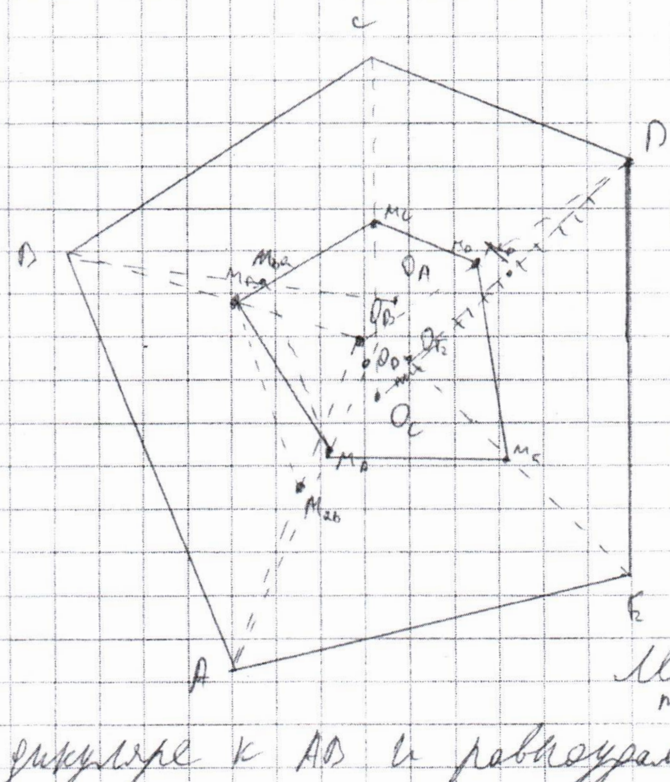
7 баллов

ЗАДАЧА № 10 . 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

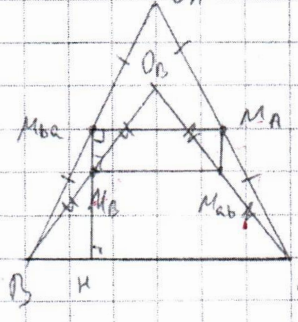
Дано: Прав. ~~пя~~ 5/уг. ABCDE; $P=2$; O_A, O_B, O_C, O_D, O_E – ц. опис. окр. Δ-ов EAB; ABC; BCD; CDE; DEA соот.; M_A, M_B, M_C, M_D, M_E – сер. отр-ов AO_A, BO_B, CO_C, DO_D, EO_E соот.

Док-ть: $M_A M_B + M_B M_C + M_C M_D + M_D M_E + M_E M_A \geq 1$

Док-во:



Начертим рисунок к задаче. Рассмотрим треугольники ΔAO_AB и ΔAO_BB: Пусть середины BO_A и AO_B – M_{ba} и M_{ab} соответственно. Так как O_A и O_B – центры описанных окружностей вокруг ΔBAE и ΔABC соот., то они лежат на серединном перпендикуляре к AB и равноудалены от A и B. т.е. $AO_A = BO_A$ и $AO_B = BO_B$. Рассмотрим отдельно Δ-ки ΔAO_AB и ΔAO_BB:



$M_A M_{ba}$ и $M_B M_{ab}$ – средние линии ΔAO_AB и ΔAO_BB соот.

$\Downarrow$

~~$M_A = M_B$~~ $M_A M_{ba} = M_B M_{ab} = \frac{AB}{2}$; $M_A M_{ba} \parallel M_B M_{ab} \parallel AB$

Трапеции $AM_AM_{ba}B$ и $AM_{ab}M_BB$ – равнобедренные с одинаковыми основаниями, тогда

ЗАДАЧА № 10. 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

их высоты совпадают, значит (если провести высоту $M_{be}H \ni M_bH$) $M_{be}H \perp M_{be}M_e$; $M_{be}H \perp M_b M_{eb}$

$M_{be}M_e \parallel M_b M_{eb}$

$M_{be}M_e = M_b M_{eb}$ $\Rightarrow$ $M_{be}M_e M_{eb} M_b$ – прямоугольник

~~Bt~~ В прямоугольнике диагонали больше сторон (гипотенуза больше катета), но так как треугольники $\triangle AO_AB$ и $\triangle AO_BB$ могут совпадать, то $M_AM_B \geq \frac{AB}{2}$

Аналогичные рассуждения можно провести с отрезками $M_BM_C \geq \frac{BC}{2}$; $M_CM_D \geq \frac{CD}{2}$; $M_DM_E \geq \frac{DE}{2}$; $M_EM_A \geq \frac{EA}{2}$, тогда

$M_AM_B + M_BM_C + M_CM_D + M_DM_E + M_EM_A \geq \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CD}{2} + \frac{DE}{2} + \frac{EA}{2} = \frac{P}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ч.т.д.

7 баллов

ЗАДАЧА № 10. 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-10-01-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Известным фактом является то, что для произвольного натурального x: ~~$(x; x$~~ НОД$(x; x-1)=1$.

Значит, если $n=t^2$, $t\in N$, то НОД$(t; t-1)=1$ $\Rightarrow$ НОД$(n; t-1)=1$ (n и t имеют одинаковый набор простых делителей); тогда, если $a^2=n$ или $b^2=n$ или $c^2=n$, то их использование бесполезно, так как тогда $a-1$ или $b-1$ или $c-1$ соответственно не будут иметь общих делителей с n, следовательно, и с n^2.

Не умаляя общности пусть $a\geq b\geq c$, тогда:

$n>a^2 \Rightarrow n>b^2\geq c^2 \Rightarrow a^2b^2c^2<n^3 \Rightarrow abc<n^{1,5} \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)<n^{1,5}<n^2$, тогда этот вариант не подходит.

$n<a^2$, ~~Ю~~ НОД$(a; a-1)=1$ $\Rightarrow$ НОД$(a-1; n^2)<\sqrt{n}$ $\Rightarrow$

$n>b^2\geq c^2 \Rightarrow$ НОД$(a-1; n^2)\cdot(b-1)(c-1)<n^2$

$n<b^2 \Rightarrow$ НОД$(b-1; n^2)<\sqrt{n}$ $\Rightarrow$ ~~$(a-1)(b-1)$~~

аналогично

$\Rightarrow$ НОД$((a-1)(b-1); n^2)<n \Rightarrow$; $c-1<n$

Проверка $n\geq x^2$ ведётся, т.к. $n\geq x^2 \Leftrightarrow \frac{n}{x}\geq x$, что проверяет, „какую часть" n занимает число x

$(a-1)(b-1)(c-1)\not\vdots\, n^2$

Все случаи говорят о том, что $(a-1)(b-1)(c-1)\not\vdots\, n^2$. Тогда такого n не существует

Ответ: нет

0 баллов

ЗАДАЧА № 10. 5	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть маг должен совершать это действие n дней.

Чтобы наверняка проверить некоторое подмножество, нужно разделить ~~подм~~ подмножество, в котором точно есть кольцо на 2 равных или почти равных (отличающихся на 1), затем сначала спросить о первом, потом 3 раза о втором. Если рез-т: (да, нет, да), то камень ~~он~~ нех ма 2 раза ~~подр~~ подряд соврать, значит, кольцо в 1-м подмножестве, если (да, да, да), то по аналогичным рассуждениям во втором, если (нет, нет, нет), во втором, если (нет, да, нет), во втором, если (нет, нет, да,), ~~во втором~~ да), то во втором, если (нет, нет, да, нет), в первом, если наоборот, то другое подмножество.

Пусть $n = 4t + m$, тогда $k = \cancel{[\frac{1000}{}}\ \lceil \frac{1000}{2^t} \rceil$

~~$1 \lceil$~~ ($\lceil x \rceil$ - округление x „вверх" до целого значения)

Обаллов

10.6 – 7б., 10.7 – 7б., 10.8 – 4б., 10.9 – 0б., 10.10 – 18б.
Суслов

ЗАДАЧА № 10 . 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть последовательные числа – это $k-8, k-7, k-6, \ldots, k+7$.

Предположим, что суммы являются последовательными натуральными числами, назовём их $s-4, s-3, s-2, \ldots, s+3$

Посчитаем суммы обоих множеств:

$(k-8)+(k-7)+\ldots+k+7 = 16k-8 \vdots 8 \quad (16k-8 = 8(2k-1))$

$(s-4)+(s-3)+\ldots+(s+3) = 8\overset{s}{\cancel{k}}-4 \not\vdots 8 \quad (8\overset{s}{\cancel{k}} \vdots 8; -4 \not\vdots 8)$

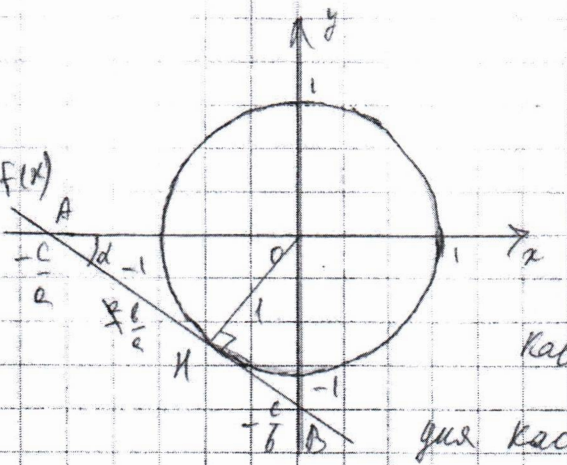
Получилось, что одно из чисел кратно 8, а другое нет, хотя должны были получиться одинаковые числа, так как множество сумм включает в себя суммы пар изначальных последовательных чисел, которые ~~в которой паре~~ встречаются только в одной из пар один раз.

Получим противоречие ⇒ не могло

Ответ: не могло.

7 баллов

ЗАДАЧА № 10 . 7	ЛИСТ 1 ИЗ ___ (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Так как $a, b, c > 0$, то выражение можно представить, как $f(x) = y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Тогда функция убывает и пересекает ось Oy в $f(0) = -\frac{c}{b} < 0$, тогда функция касается окружности в 3-й четверти, и, разумеется, данная функция линейна, т.к. все переменные в ней 1-й степени

$f(x) \cap Ox = A\ (y=0)$: $0 = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}x = -\frac{c}{b} \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$; $f(x) \cap Oy = B\ (y = -\frac{c}{b})$

Так как функция касается единичной окружности, то расстояние от центра системы отсчёта до линейной функции $= 1$, перпендикуляр проходит к точке касания (H)

~~AH~~ $\operatorname{tg}\alpha = -$[коэффициент при аргументе $f(x)$] $= \frac{a}{b}$

$AH = \frac{OH}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

$AO^2 = OH^2 + AH^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

$AO^2 = \cancel{\left(-\frac{c}{a}\right)^2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$ (длина отрезка от начала координат по оси равна модулю ненулевой координаты)

$\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad | \cdot a^2$

$c^2 = a^2 + b^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, эти отрезки могут образовать прямоугольный треугольник.

ч.т.д.

7 баллов

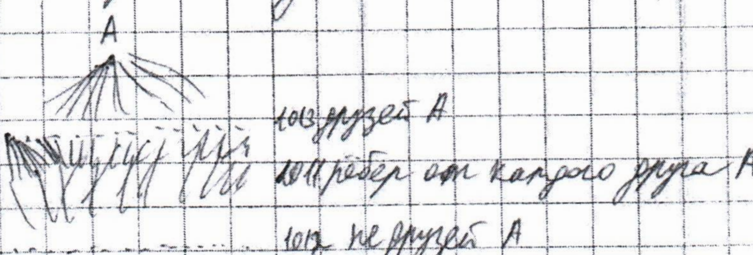
ЗАДАЧА № 10.8	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Представим множество математиков как граф с 2026 вершинами, в котором рёбра — дружественные связи. Найдём максимальную возможную степень в графе, обозначим одну из вершин с наибольшей степенью за A. Очевидно, что ~~если~~ если математик имеет наибольшее число друзей x (или он входит в число таких), то все его друзья должны иметь не одного друга меньше $x-1$. У этих друзей A будет одинаковое число друзей, следовательно, друзьями друг другу они не являются. Тогда должно выполняться неравенство:

$$\underbrace{2026}_{\text{общее число}} - \underbrace{x}_{\text{число друзей A}} - \underbrace{1}_{\text{сам A}} \geq \cancel{2026\,x(x-1)}\ \cancel{x-1}\ \underbrace{x-1-\overbrace{1}^{\text{ребро, исходящее к A}}}_{\text{степень вершин-друзей A}}$$

$$\cancel{2026 \geq}\ 2027 \geq 2x$$

$\cancel{20}\ 1013{,}5 \geq x \Rightarrow$ Наибольшее натуральное x, удовлетворяющее неравенству $x = 1013$.



У каждого из не друзей A должно быть 1011 или 1013 друзей, т.к. у друзей A по 1012 друзей. Если у каждого из не друзей по

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

1013 друзей, то от них к друзьям А исходит 1012 · 1013 рёбер, а от друзей А 1013 · 1011 < 1012 · 1013 рёбер, что невозможно, тогда не друзья А должны дружить между собой в некотором количестве. В этом случае друзьями будут те, их кого по 1013 друзей, т.е. равное количество, что противоречит условию задачи. ~~Из этой ситуа~~ Если у всех будет по 1011 друзей, то от друзей А будет исходить ~~1012~~ 1011 · 1013 рёбер, а от не друзей 1011 · 1012 < 1011 · 1013 рёбер, что невозможно. Из этой ситуации можно выйти, например, сделав одного из не друзей А изгоем (он не будет иметь друзей вовсе), а остальные будут иметь по 1013 друзей из друзей А, тогда и „исходящих" и „входящих" рёбер будет по 1013 · 1011. В таком случае всего рёбер (дружественных связей) будет 1013 + 1013 · 1011 = 1013 · 1012 = 1025156.

Если попытаться подружить изгоя друзьями А, то нужно отделять по 2 дружественные связи от не друга А (1013 → 1011) и присоединять к изгою, то общее кол-во связей не изменится, аналогично, если присоединять связи от не друзей А. Если разъединять связь между другом и не другом А, ~~то~~ а затем соединять обоих математиков с изгоем, то он будет получать каждый раз чётное число дружественных связей, а в итоге из-за связи с друзьями А

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-10-01-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

должно получиться нечётное число друзей, что невозможно.

Осталось только рассмотреть, что будет, если уменьшить максимальное число дружественных связей в графе.

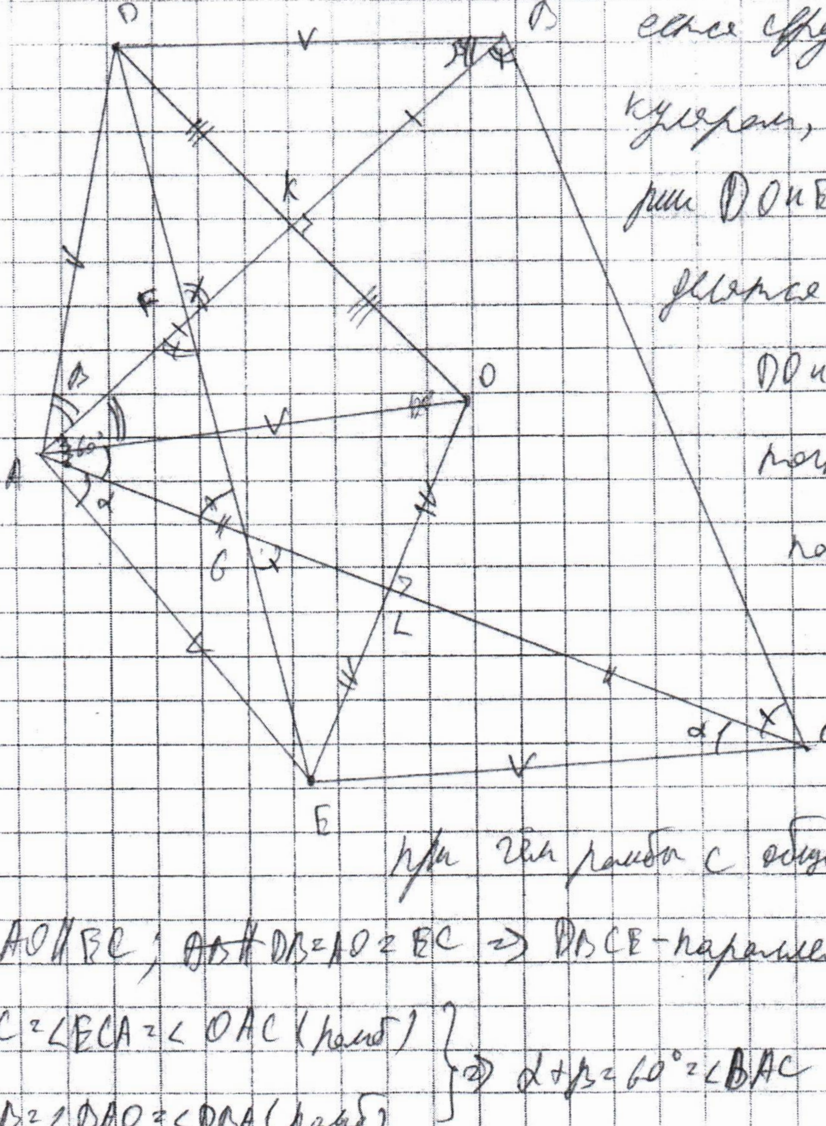
Даже пренебрегая условием рёбер получится, как максимум, $\frac{2026\cdot 1012}{2} = 1013\cdot 1012 = 1025156$, столько же, сколько получилось в вариации „с изгоем", тогда наибольшее количество пар друзей — 1025156.

Ответ: 1025156

3 балла

ЗАДАЧА № 10 . 9	ЛИСТ 1 ИЗ ___ (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-01-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Дано: $\triangle ABC$, O – ц. опис. окр., D симм. O отн. AB;
E симм. O отн. AC; DA, $DE \cap AB, AC = F, G$
Док-ть: $\omega_{\triangle BDF}$ кас. ω_{ACEG}



Док-во:

O – ц. опис. окр. $\triangle ABC$

$\perp$ из O к AB и AC являются серединными перпендикулярами, при этом из симметрии DO и EO отрезками AB и AC соотв. делятся пополам.

DO и AB, а также EO и AC точкой пересечения делятся пополам и перпендикулярны друг другу

$\Rightarrow$ $ADBO$ и $AECO$ – ромбы, при чём ромбы с общей стороной AO, тогда

$DB \parallel AO \parallel EC$; ~~DB∥~~ $DB = AO = EC \Rightarrow DBCE$ – параллелограмм $\Rightarrow DE \parallel BC$, $DB = BC$

$\alpha = \angle EAC = \angle ECA = \angle OAC$ (ромб)
$\beta = \angle DAB = \angle BAO = \angle DBA$ (ромб)
$\Rightarrow \alpha + \beta = 60° = \angle BAC$

$AC \cap EO = L$; $AB \cap DO = K$

$\angle AKO = \angle ALO = 30°$ $\Rightarrow AKOL$ – вписан. с диаметром $AO \Rightarrow \angle EOD = 180° - \underbrace{60°}_{\angle BAC} = 120°$

по ~~пр~~ II-ми (накр. леж.) $\angle EGC = \underset{\angle ABD}{\angle ACB}$; $\angle DFB = \underset{\angle AFE}{\angle ABC}$
по AC и AB

$DE \cap AO = X$; $\angle EXO = \cancel{90°}\ \alpha + \angle ACB = \angle BCE$
$\angle DXO = \beta + \angle ABC$

0 баллов