9.1.	9.2	9.3	9.4	9.5.
7	0	0	0	~~0~~

ЗАДАЧА № 9. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим первые 2 неравенства:
$a^2+b^2<(a-b)^2$ и $b^2+c^2<(b-c)^2$. ~~Перенесем~~ Раскроем полные квадраты и перенесем a^2 и b^2 b^2 и c^2 в левые части

$a^2+b^2<a^2-2ab+b^2$ $\quad b^2+c^2<b^2-2bc+c^2$

$0<-2ab$ $\quad 0<-2bc$.

Домножим неравенства на $-\frac{1}{2}$ и получим систему

$\begin{cases} 0>ab \\ 0>bc \end{cases}$ Т.к. произведение двух чисел <0, то одно из них >0, а другое <0. Хоть в обоих одинаковый знак, значит есть 2 случая

1. $b<0$, a и $c>0$ Теперь можно раскрыть $(a+c)^4$:
2. $b>0$ a и $c<0$

$(a+c)^4=(a^2+2ac+c^2)(a^2+2ac+c^2)=a^4+2a^3c+a^2c^2+2a^3c+4a^2c^2+$
$+2ac^3+a^2c^2+2ac^3+c^4$ ~~Все~~ $=a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^3+c^4$

Вставив это в $\boxed{\text{III}}$ неравенство и перенеся a^4 и c^4 в левую часть получим что $0<4a^3c+6a^2c^2+4ac^3$

Теперь рассмотрим те 2 случая

1. $b<0$, a и $c>0$ Тогда получится, что $\overset{0}{\wedge}4a^3c+\overset{0}{\wedge}6a^2c^2+\overset{0}{\wedge}4ac^3$, а значит неравенство выполняется

2. $b>0$, a и $c<0$. Получится тоже самое, $\overset{0}{\wedge}4a^3c+\overset{0}{\wedge}6a^2c^2+\overset{0}{\wedge}4ac^3$, а значит неравенство всегда выполняется (если a,b,c соответствуют условию)

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2	M-09-05-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Оценка:

Докажем, что ~~$d \geq 3$~~ $d \leq 3$. Для начала рассмотрим $d=5$. Тогда можно заметить, что на одной прямой будет 5 разных чисел идущих подряд, то есть 1 2 3 4 5 1 (не обязательно в таком порядке). Рассмотрим вершину клетки под центральным числом (в данном случае это 3). Тогда от всех остальных вершин у нее ~~р~~ расстояние будет меньше 3.

Рассмотрим $d=4$. Если числа идут так же, как и при ~~d~~ $d=5$, то у нас уже доказано, что $d \leq 3$. Теперь рассмотрим другую расстановку, когда в на прямой идут 4 разных числа в ряд, в данном случае у меня это 1 2 3 4 1. Теперь возьмем 2 вершины клетки под центральными числами, в данном случае у меня это 2 и 3. Тогда у нас остался 1 цвет, и одна из этих вершин будет нового цвета, а вторая - старого, и расстояние до другой верш. того же цвета у нее меньше 4, а значит $d=4$ тоже не может быть.

Пример:

Теперь нужно построить пример для ~~$d=3$~~ $d=3$. Основой примера я возьму квадрат, образованный 9 вершинами и закрашу его так, чтобы у него d было равно 3.

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-09-05-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

4	5	3	2	1	4
3	2	1	4	5	3
1	4	5	3	2	1
5	3	2	1	4	5
2	1	4	5	3	2
4	5	3	2	1	4

Центром этого квадрата у меня будет 1, тогда дальше этот квадрат можно расширять в другие стороны так, чтобы $d=3$. Тогда у нас получится цикл из квадрата 5×5

Четыре таких квадратами мы заполним в квадрат 11 на 11,

2	1	4	5	3	2	1	4	5	3	2	1
4	5	3	2	1	4	5	3	2	1	4	5
3	2	1	4	5	3	2	1	4	5	3	2
1	4	5	3	2	1	4	5	3	2	1	4
5	3	2	1	4	5	3	2	1	4	5	3
2	1	4	5	3	2	1	4	5	3	2	1
4	5	3	2	1	4	5	3	2	1	4	5
3	2	1	4	5	3	2	1	4	5	3	2
1	4	5	3	2	1	4	5	3	2	1	4
5	3	2	1	4	5	3	2	1	4	5	3
2	1	4	5	3	2	1	4	5	3	2	1
4	5	3	2	1	4	5	3	2	1	4	5

а остальные клетки заполним вручную. Таким образом получится пример для $d=3$, а больше d сделать нельзя, что я доказал ранее.

ответ не верный

Так сможет играть Петя.

Обозначим кучки как 1 и 2, где 1 — кучки, из которых нельзя взять ~~камни~~ спички, 2 — кучки, из которых можно спички.

Можно заметить, что изначально сумма кучек нечетна
только одна кучка с тем числом спичек
(1+2+2...+2), а победить первый может только тогда, когда после его хода останется четная сумма, причем всегда, то есть после каждого хода. Поэтому первым ходом он должен взять 999 камней из самой большой кучки чтобы (1+1+2+...+2=чет) в ней остался 1 камень, тогда сумма станет четной.

Далее ходит второй игрок, и первому игроку нужно будет походить ~~так~~ в зависимости от хода второго, поэтому надо посмотреть, как второй может походить. У второго игрока есть 3 возможных хода.

1. Оставить такую же четность. Тогда первый игрок должен полностью убрать 1 кучку с наибольшим количеством камней.
2. Убрать 1 кучку. Четность не поменяется, если он не убрал кучку с одним камнем, но это будет в конце, поэтому пока не рассматриваем. Ну тут Петя тоже ~~может~~ должен убрать 1 кучку на всякий случай, тогда так же

ЗАДАЧА № 9. 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

чётность не поменяется (чет. - чет - чет = чет)

3. Если второй игрок оставит кучу с одной спичкой ~~камнем~~, тогда первый игрок должен либо сделать тоже самое, либо если таких куч не осталось убрать кучу с 1 спичкой ~~камнем~~.

Таким образом после любого хода первого игрока будет оставаться чётная сумма ~~на~~ куч на столе.

Затем после ~~какого то~~ ~~по~~ какого-то хода первого игрока на столе останется чётное количество куч с 1 спичкой ~~камнем~~.

~~Ну~~ Ну значит они будут убирать по одной куче, и ~~т.т~~ т.к. их всего чет, а Петя ходит вторым ~~на~~ (в первый ход он поделил на 999 спичек ~~камней~~, а затем ходит второй после Васи), то он и возьмет последнюю, четную спичку

ЗАДАЧА № 9. 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-09-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Можно заметить, что если это число есть, то оно чет (т.к. иначе произведение 3-х четных числа должны делиться на квадрат нечетного) и это число не является степенью двойки (будет противоположная ситуация)

Значит это произведение должно делиться хотя бы на 4, т.к. n - чет, а у а у него есть хотя бы 1 делитель 2, а у n^2 их хотя бы 2.

~~Но и-1 тоже образует новые делители~~

Но мы должны получить кратность каждого из чисел вида $(a-1)(b-1)(c-1)$, а значит получатся новые делители числа n, которые так же будут представлены числами такого вида.

В итоге получится, что с каждым разом у n будут все больше делителей которые появляются из представления квадрата ~~простых~~ простых делителей произведения $(a-1)(b-1)(c-1)$, и так до бесконечности, а значит это невозможно и таких чисел нету

9.6	9.7	9.8	9.9	9.10
7	7	–	0	–

Итого: 7б + 14б = 21б.

ЗАДАЧА № 9.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Нет, не обязательно найдутся такие клетки.
Можно заметить что из каждой угловой клетки можно добраться до другой минимум за 7 ходов, а нужно чтобы она прошла 3 угловые клетки за 21 ход, значит они будут являться предугловыми.
Вот контрпример, где ~~таких~~ нужных АиВ клеток нету:

7	8	9	10	11	12	13	14
6						15	
5					16		
4				17			
3			18				
2		19					
1	20						
21							

14	13	12	11	10	9	8	7
	15						6
		16					5
			17				4
				18			3
					19		2
						20	1
							21

21							
1	20						
2		19					
3			18				
4				17			
5					16		
6						15	
7	8	9	10	11	12	13	14

							21
						20	1
					19		2
				18			3
			17				4
		16					5
	15						6
14	13	12	11	10	9	8	7

Где ~~цифры~~ числа — это порядок ходов.
Можно заметить, что в этом примере нету 2 клеток, у которых эти числа идут в одинаковом порядке.

ЗАДАЧА № 9. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-09-05-2
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Сразу можно заметить пару $a=b=p$. Давай посмотрим, есть ли другие пары.

Сделаем преобразования в уравнении:

$$\frac{ab+p^2}{pb}=2$$

$$ab+p^2=2pb$$

Т.к. p простое, то $ab \vdots p$, т.к. все остальные делится на p в уравнении. ~~Но если $b \vdots p$, то оно имеет вид pk. Подставим это в первоначальное уравнение~~

$$\cancel{\frac{a}{p}+\frac{p}{pk}=2}$$

$$\cancel{\frac{ak+p}{pk}=2} \quad \cancel{ak+p=2pk}$$

~~значит ak делится на p~~

Но если $b \vdots p$, то оно имеет вид pk. Подставим это в первоначальное уравнение:

$$\frac{a}{p}+\frac{p}{pk}=2$$

$$\frac{a}{p}+\frac{1}{k}=2 \Rightarrow \frac{ak+p}{pk}=2$$

ak и $pk \vdots k$, ap ~~не~~ простое, но т.к. у нас получится целое число, то $k=p$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ap+p}{p^2}=2 \quad \cancel{2k} \Rightarrow \frac{p(a+1)}{p^2}=2 \Rightarrow \frac{a+1}{p}=2 \Rightarrow a=2p-1$$

ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Проверим, работает ли эта пара $a=2p-1$ и $b=p^2$

$$\frac{2p-1}{p}+\frac{p}{p^2}=2$$

$$\frac{2p-1}{p}+\frac{1}{p}=2$$

$$\frac{2p-1+1}{p}=2$$

$$\frac{2p}{p}=2$$

Значит эта пара тоже работает. Теперь вернемся к случаю, где $a b \vdots p$. Пусть теперь $a \vdots p$ и имеет вид $kp \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{kp}{p}+\frac{p}{b}=2$$

$k+\frac{p}{b}=2$. Можно заметить, что т.к. a и p - натуральные $a \vdots p$, то k - натуральное, а значит в этом уравнении оно равно либо 1, либо 2, но 2 оно не может быть, т.к. $\frac{p}{b} \neq 2$ т.к. они натуральные.

Значит $k=1$, $\frac{p}{b}=1 \Rightarrow p=b$, а это первый случай.

Ответ: пары $a=b=p$ и $a=2p-1$, $b=p^2$

ЗАДАЧА № 9. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть $\frac{1}{a}=x$; $\frac{1}{b}=y$; $\frac{1}{c}=z$. Тогда будет неравенство

$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2 \;?\; b^2x+c^2y+a^2z$

Перенесем все в одну сторону и раскроем левые квадраты:

$a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz-b^2x-c^2y-a^2z \;?\; 0$

Частично сгруппуем неравенство и перенесем $-2ax-2by-2cz$ в другую часть

$\cancel{a^2(1-z)+b^2(1-x)+c^2(1-y)+x^2+y^2+z^2}$?

$\cancel{? \; 2ax+2by+2cz}$

$\cancel{2ax+2by+2cz=2a\frac{1}{a}+2b\frac{1}{b}+2c\frac{1}{c}}$

$\cancel{=2+2+2=6}$

~~В итоге надо доказать что~~

$\cancel{a^2(1-z)+b^2(1-x)+c^2(1-y)+x^2+y^2+z^2 \geq 6}$

$2ax+2by+2cz=6$

$a(a-z)+b(b-x)+c(c-y)+x^2+y^2+z^2 \overset{?}{\geq} 6$

В итоге нужно доказать что это неравенство ≥ 6

Можно заметить, что все скобки положительны, так как все числа ≥ 1 и они удовлетворяют равенству, то ~~в самом низшем~~ это неравенство будет верным.