11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	Σ 1
7	4	3	×	0	14 баллов

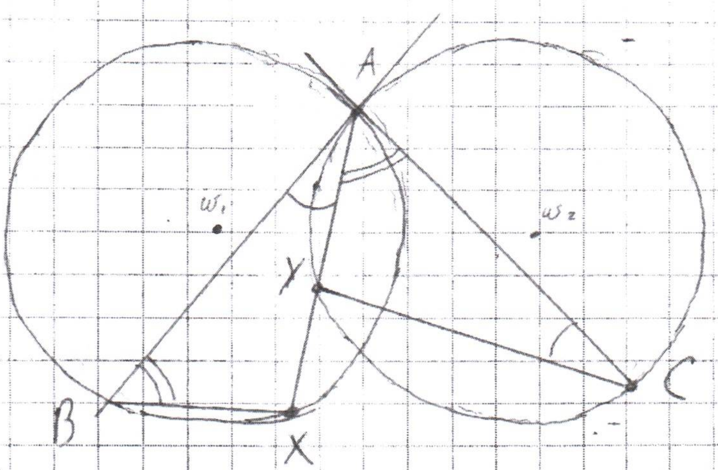
ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-11-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Так как числа последовательные, то их можно обозначить как t; $t+1$; $t+2$; $t+3$; $t+4$; $t+5$. Пусть $a = t+1$; $b = t$; $c = t+2$; $d = t+4$; $e = t+3$; $f = t+5 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{d}{e+f} = \frac{t+1}{2(t+1)} + \frac{t+4}{2(t+4)} = 1 \Rightarrow$$ Всегда их можно обозначить, чтобы получилась 1

7б

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-11-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



AB - касательная $\Rightarrow \angle BAY = \angle ACY$

AC - касательная $\Rightarrow \angle ABX = \angle XAC$

Так как окружности ω_1 и ω_2 - равные: у них одинаковый радиус: $R \Rightarrow$

$BX = R \cdot \angle B\omega_1 X = 2R \angle BAX = 2R \cdot \angle ACY = R \cdot \angle A\omega_2 Y = AY$

$AX = R \cdot \angle A\omega_1 X = 2R \angle ABX = 2R \angle XAC = R \angle Y\omega_2 C = YC$

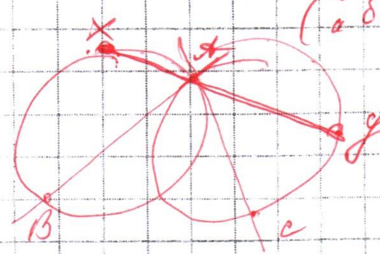
На отрезке AX: $AX = AY + YX \Rightarrow YC = BX + XY$

Для случая когда $AY > AX$: те же самые рассуждения, только: На отрезке AY: $AY = AX + XY \Rightarrow BX = YC + XY$

4б.

Δ - не один из случаев ("более сложный")

О втором речь не идёт



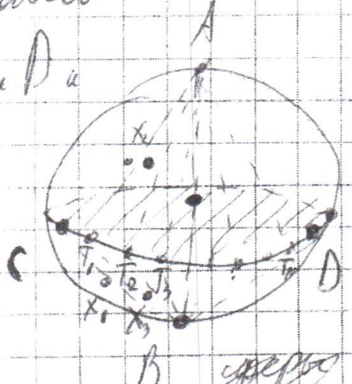
ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	А-11-11-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть первым ходом Петя из 1000 → 999, а всеми последующими будет поступать так: (Наиб. куча спичек ~~камней~~ имеет k спичек ~~камней~~) если кол-во куч с k-1 спичками ~~камнями~~ чётно, то: он забирает из своей кучи все камни. А если нет, то: забирает 1 спичку ~~камень~~. Таким образом кол-во спичек ~~камней~~ в куче с k-1 спичками ~~камнями~~ после его хода чётно. Критерий (1) – 2б.

Заметим, что ~~после хода Пети~~ если после хода Пети кол-во ~~камней в наиб. группе~~ куч с наиб. кол-вом спичек ~~камней~~ чётно, то Петя будет доставать спички ~~камни~~ из куч с этим кол-вом камней последним (так как за каждый ход их кол-во уменьшается ~~ается~~ ровно на 1). крит. (X) + 1балл Изначально кол-во ~~камней~~ куч с наиб. кол-вом спичек ~~камней~~ после хода Пети – чётно. Так-же если куча ~~камни в кучах~~ с наиб кол-вом спичек ~~камней~~ кончаются, то следующих куч, тоже чётно. => Петя достает спички ~~камни~~ так чтобы наиб. кол-во спичек ~~камней~~ в кучах уменьшалось => Петя достанет спички ~~камни~~ из последней кучи => Петя победит

ЗАДАЧА № 11. 5	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-11-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Возьмём ~~окружность~~ сферу; две точки на диаметре A B; Сечение проходящее через центр ~~окр~~ сферы и перпендикулярное AB; Возьмём на этом сечении точки C и D и несколько точек на дуге CD, сечения; (C и D - не диаметр)



~~Будем красить ребра так:~~
~~AC, далее и все ребра на сечении, кроме CD; DB и AB~~

Обозначим т. на окр за $T_1, T_2 \dots T_n$;
~~Тогда фигура $ABCDT_1T_2\dots$ состоит из граней: (ABC) (ABD) и плоскостей граней с точками~~

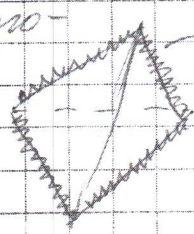
Теперь для каждой T_i выберем точку на дуге сферы: AT_iB таким образом чтобы если $i \vdots 2$ то X_i между A и T_i, если $i \not\vdots 2$ то X_i между B и T_i => X_i (будем выбирать так чтобы $T_1X_1 = T_iX_i$)
Тогда рассмотрим фигуру $ABCDX_1X_2\dots X_n$ => она выпукла так как ее ~~точки~~ вершины - это точки на сфере; она состоит из граней (ABC); (ABD); (CX_1X_2); ($X_1X_2X_3$); ($X_2X_3X_4$) ... (DX_nX_{n-1}); (BCX_1); (ACX_2); (BX_1X_3) ...
Будем красить ребра так:

ЗАДАЧА № 11. 5	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	Н-11-11-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

AB; BD; $D X_n$; $X_n X_{n-1}$ ... $X_2 X_1$; $X_1 C$; CA =>

Каждая вершина ~~покрашена~~ граничит с 2-мя кр. рёбрами; Все соседние кр. рёбра в одной грани, ~~Очевидно~~, легко заметить, что каждая грань - Δ в которой как мин. 1 ребро не закрашенно;

Заметим что можно составить такой многогранник для любого кол-ва T больших или равных 1, а для кол-ва вершин = 4 есть пример:



Для кол-ва вершин < 4: это не многогранник.

Ответ: $n \geq 4$ (больше или равно 4 вершинам в много-граннике.

11.6	11.7	11.8	11.9	11.10	Σ_2
7	×	×	5	0	12 баллов

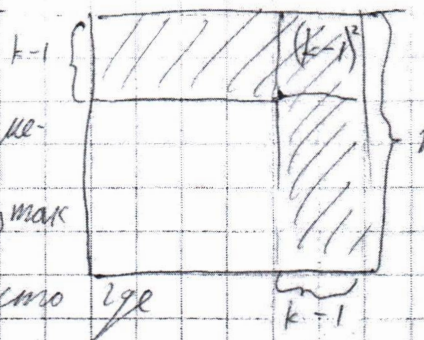
Итого: 14+12=26 баллов

ЗАДАЧА № 11. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-11-11-2
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть число $m = 13 \cdot 5$; $n = 13 \cdot 2 \Rightarrow m+n = 13 \cdot 7$, $m-n = 13 \cdot 3$
Наибольший делитель каждого из чисел - это $13 \Rightarrow$ Ответ: существует

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-11-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

~~Возьмём~~ Будем красить клетки так:



Заметим что в этой раскраске нельзя разместить квадрат $k\times k$, так как единственное место где по ширине больше $k-1$ клетки в высоту $k-1$;

Всего клеток, закрашенных в этой раскраске: $2n\cdot(k-1)-(k-1)^2$ - сумма 2-ух прямоуг. ~~длины~~ $n\cdot(k-1)$ вычесть их пересечение;

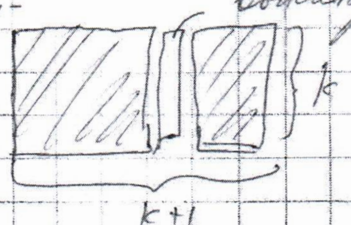
Оценка $\forall$ прямоуг. ~~~~ $l\times m$, где $l, m \geq k$.

~~Если~~ Докажем, что если в нём нет $k\times k$, то ~~из одного~~ в одном из ~~крайних~~ столбцов или строк ~~только~~ находится меньше k закрашенных клеток. $\square$: Рассмотрим k клеток у края, для каждой этой клетки ~~слева~~ справа есть ~~хотя бы~~ как минимум $k-1$ клетка $\Rightarrow$ $\exists$ квадрат $k\times k$ $\Rightarrow$ Есть столбец или строчка с не более $k-1$ закраш. клеткой.

Докажем, что если до этого в прямоуг не было $k\times k$ закраш. клеток и все клетки были подряд, то после выкидывания этого столбца/строчки усл. сохраняется.

ЗАДАЧА № 11.9	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-11-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Все клетки подряд – сохраняется. Пусть ~~есть~~ появился кв. $k \times k$ $\Rightarrow$ Рассмотрим его. Так как в нём не более



$k-1$ кл. и клетки подряд, что по разные стороны не может быть k клеток в высоту (выкинули столбец), в ширину (выкинули строчку.)

Таким образом можно выкидывать из $n \times n$ столбцы строчки t раз, пока не получим прямоуг. вида $(k-1) \times z$; $z \geq k$ $\Rightarrow$ клеток в $n \times n$ не более чем

$t \cdot (k-1) + z(k-1)$; $t + z + k - 1 = 2n$

$(2n - k + 1)(k-1) = 2n(k-1) - (k-1)^2$

ЗАДАЧА № 11. 10	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-11-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Так как $\frac{a}{b^4+2b}+\frac{b}{c^4+2c}+\frac{c}{a^4+2a}$ – симметрично

упорядочим $a; b; c$; Пусть $a \geq b \geq c \Rightarrow a^4+2a \geq b^4+2b \geq c^4+2c > 0 \Rightarrow \frac{1}{c^4+2c} \geq \frac{1}{b^4+2b} \geq \frac{1}{a^4+2a} > 0 \Rightarrow$ По св. транс. неравенств:

$$\frac{a}{b^4+2b}+\frac{b}{c^4+2c}+\frac{c}{a^4+2a} \geq \frac{a}{a^4+2a}+\frac{b}{b^4+2b}+\frac{c}{c^4+2c} =$$

$$= \frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2} =$$

$$= 1 + \frac{4-a^3b^3c^3-a^3b^3-a^3c^3-b^3c^3}{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)} \overset{?}{\geq} 1$$

$$4 \overset{?}{\geq} a^3b^3c^3+a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3$$

$$\frac{a+b+c}{3} = 1 \geq \sqrt[3]{abc} \quad 1 \overset{?}{\geq} a^3b^3c^3$$

$$3 \overset{?}{\geq} a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3$$