11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	Σ_1
7	3	2	X	0	12 баллов

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-12-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Расмотим 6 последовательных натуральных чисел как

x ; $x+1$; $x+2$, $x+3$; $x+4$; $x+5$;

пусть $a = x+3$; $b = x+4$; $c = x+1$;

$d = x+2$; $e = x$ $f = x+5$

тогда:

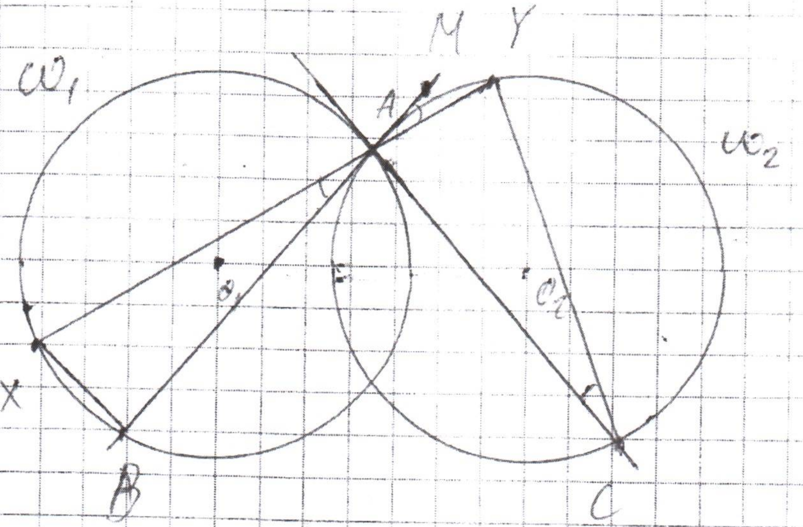
$$\frac{a}{b+c} + \frac{d}{e+f} = \frac{x+3}{2x+5} + \frac{x+2}{2x+5} = \frac{2x+5}{2x+5}$$

$2x+5 \neq 0$ т.к. x тоже натуральное

$\Downarrow$

$\frac{2x+5}{2x+5} = 1$, т.е. натуральное число.

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-12-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Заметим, что для ω_1 AB - хорда, AC - касательная, $\angle CAB = \frac{1}{2} \smile AB$ (угол между хордой и касательной).

В ω_2 AC - хорда, AB - касательная, $\angle CAB = \frac{1}{2} \smile AC$. $\Rightarrow \smile AC = \smile AB$, а равные дуги стягивают равные хорды $\Rightarrow AB = AC$. Отметим на продолжении AB точку M. $\angle MAY = \angle XAB$ как вертикальные, при этом $\angle MAY$ — это угол между хордой и касательной, ~~что~~ это значит $\angle MAY = \frac{1}{2} \smile AY$

$\angle ACY$ в ω_2 является вписанным

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-11-12-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$\angle ACY = \frac{1}{2} \smile AY \Rightarrow \angle ACY = \angle MAY = \angle \cancel{X}XAB.$

$AB = AC$ и радиусы окружностей одинаковы, значит $\angle AYC = \angle AXB$

Из чего можно сказать, что

$\triangle XAB = \triangle YCA$ по стороне и прилежащим углам ($AB = AC$; $\angle YAC = \angle XBA = 180 - \angle BXA - \angle XAB$; $\angle XAB = ACY$)

$XB = AY$, $XA = YC$

$\Downarrow$

$XA + AY = YC + XB$

$XY = YC + XB$ ч.т.д.

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-12-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим какую позицию p, когда остались только единичные кучи (т.е. каждая куча — одна спичка) эту позицию можно назвать выигрышной, если число куч нечётно. Рассмотрим эту же позицию p, но добавим к ней кучу из 2 спичек (например 112). Если p - выигрышная, то убрав из кучи с 2 спичками одну, мы получим проигрышную позицию (1111). Если же p - проигрышная (например 11), то мы можем получить выигрышную (112 → 111). Значит число единиц в позиции вообще неважно можно смотреть только на число двоек (пока кучи или с 1 или с 2 спичками). Например $p_1 = \underbrace{11\ldots11}_{k}2$ как уже поняли выигрышная, а $p_2 = \underbrace{11\ldots11}_{k}22$ проигрышная, т.к. может привести в p_1. Число единиц неважно, а поэтому будем разбирать позиции

ЗАДАЧА № 11. 3 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-12-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

только из двоек. $p_1 = 2$ V $p_2 = 22$ X

$p_3 = 222$ V (ведёт в p_2) $p_4 = 2222$ X (ведёт в p_3)

Значит при чётном количестве двоек - позиция проигрышная, а при нечётном - выигрышная.

А что если остались кучи с 3 спичками?

Например $k_1 = \underbrace{22\ldots2}_{n}3$

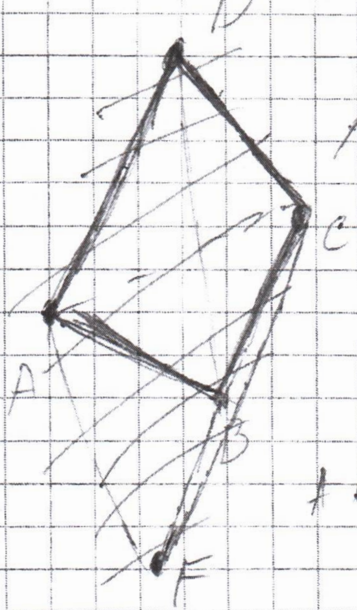
n - любое число до 998. По аналогии с тем, как было доказано, что выигрышность позиции из 1 и 2 зависит только от числа двоек в ней, можно доказать тоже самое и для троек. Т.е. если чётное число куч из трёх спичек - позиция проигрышная, нечётное - выигрышная. Точно также можно сказать и про другие кучи. Если в позиции максимальный размер кучи m и куч такого размера нечётное количество, то позиция выигрышная. У нас максимальный размер - 1000. Такая куча всего одна. Позиция выигрышная и Петя победит.

Ответ: Петя.

ЗАДАЧА № 11 . 5	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-12-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

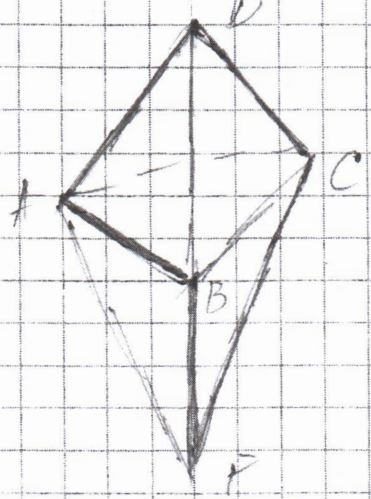
Каждое ребро соединяет 2 вершины и при этом в каждую вершину входят 2 закрашенных ребра, значит сколько закрашенных рёбер, столько и вершин в многограннике.

Когда вершин 5:



в пирамиде ~~ABCD~~ ABCD можно закрасить рёбра AD, DC, AB, ~~...~~

а в пирамиде ABCF: BF, FC.



11.6	11.7	11.8	11.9	11.10	Σ_2
7	0	X	2	X	9б

Итого: 12+9=21балл

ЗАДАЧА № 11. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-12-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Возьмём числа

$m=85=17\cdot5$ и $n=34=17\cdot2$

тогда $m+n=119=17\cdot7$

$m-n=51=17\cdot3$

Для всех чисел $m, n, m+n, m-n$ наибольший делитель, отличный от самого числа одинаков и равен 17.

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-12-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

запишем последовательность как

$a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_{2026}$

допустим, что

$\frac{a_2 a_3}{a_2 - a_3} \notin R$ и такая пара единственная

$a_2 a_3 \notin R$

$a_2 - a_3 \in R$.

тогда

$\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \in R$; $\frac{a_3 a_4}{a_3 - a_4} \in R$ $\quad a_1 a_2 a_3 a_4 \in R$

но $a_2 a_3 \notin R$

$\Downarrow$

$a_1 a_4 \notin R$

$\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \in R$; $\frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5} \in R$ $\quad a_1 a_2 a_4 a_5 \in R$

но $a_1 a_4 \in R$

$\Downarrow$

$a_2 a_5 \notin R$

в общем виде можно записать, что $a_1 a_n \notin R$ при $n \vdots 2$

и $a_2 a_n \notin R$ при $n \not\vdots 2$

Но тогда $a_1 a_{2026} \notin R$, т.е. иррациональных записей как минимум 2.

Здесь рассматривались случаи, когда $a_n - a_{n+1} \in R$ при $n \in [1; 2025]$

ЗАДАЧА № 11 . 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-11-12-2
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Но иррациональное число может получиться и при делении рационального на иррациональное. Рассмотрим когда $a_n a_{n+1} \in R$ для любых $n \in [1, 2025]$ и $a_2 - a_3 \notin R$ будем обозначать за $t_{n\,n+1}$ запись $a_n - a_{n+1}$, тогда

$t_{23} \notin R$ $\quad \frac{a_1 a_2}{t_{12}} \in R \quad \frac{a_2 a_3}{t_{23}} \notin R$

$\frac{a_3 a_4}{t_{34}} \in R$

$(a_1 - a_2)\, t_{34} \in R \quad (a_2 - a_3)\, t_{34} \notin R$

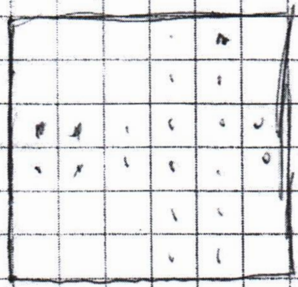
$\Downarrow$

$a_1 - a_3 \notin R$

~~можно~~

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-12-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Можно закрасить $(k-1)(2n-k+1)$ клеток.
Например представим 2 одинаковые полосы закрашенных клеток с шириной $(k-1)$ и длиной n
если их наложить друг на друга, то площадь будет: $2n(k-1)-(k-1)^2 =$
$=(k-1)(2n-k+1)$



$n=6$
$k=3$

Осталось доказать, что нельзя ~~бо~~ закрасить больше клеток, что, откровенно говоря, у меня не получилось.