9.1.	9.2	9.3.	9.4	9.5
7	7	7	7	0

ЗАДАЧА № 9 . 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-09-02-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№1.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2<(a-b)^2 \Rightarrow a^2+b^2<a^2-2ab+b^2 \quad -2ab>0 \\ b^2+c^2<(b-c)^2 \Rightarrow b^2+c^2<b^2-2bc+c^2 \quad -2bc>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ поскольку $-2ab$ и $-2bc$ положительны, то можем перемножить данные неравенства с сохранением его знака

$(-2ab)(-2bc)>0 \quad 4ab^2c>0 \Rightarrow ab^2c>0$

тогда можем заметить, что если среди a, b или c есть 0, то одно из неравенств становится неверным, (пусть $a=0$; $0^2+b^2<(-b)^2$; $b^2<b^2$ (!!)) тогда все числа ненулевые $\Rightarrow$ и их квадраты тоже ~~>~~ $\Rightarrow b^2>0 \Rightarrow ac>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2c^2>0 \quad 6a^2c^2>0 \qquad a^3c>0 \quad 4a^3c>0$

$ac^3>0 \quad 4ac^3>0$

тогда $6a^2c^2+4a^3c+4ac^3>0 \quad |+(a^4+c^4)$

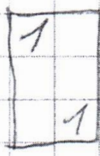
$a^4+c^4<a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^2+c^4=(a+c)^4$

ч.т.д.

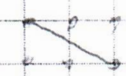
ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	14-09-02-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№2.

Представим клетчатую доску 11×11 в виде доски 12×12, где клетка - это вершина в исходной доске, тогда посмотрим на прямоугольник 2×3,



в нем 6 клеток, а цветов всего 5 ⇒ будет хотя бы 1 повторение, тогда наибольшее расстояние между ними будет, когда это крайние угловые клетки ⇒ в исходной доске расстояние между ними представимо в виде диагонали в доминошке 1×2



⇒ ⇒ если примем за длину одной стороны клетки исходной доски за 1, то по теореме Пифагора $d \le \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$, тогда по оценки и поскольку нам нужен максимальный d, то $d = \sqrt{5}$.

Пример раскраски на преобразованной доске 12×12

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-09-02-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3
1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5
3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2
5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4
2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3
1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5
3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2
5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4
2	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4	3

ЗАДАЧА № 9. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-02-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№ 3.

Предположим, позиция первого игрока проигрышная, тогда все возможные варианты ходов ведут в выигрышную позицию, т. е. позиции (1, 2, 3 ... 998, 999, (0, 999)) - выигрышные, тогда рассмотрим позицию (1, 2 ... 999, 999), которая по предположению выигрышная ⇒ из неё можно попасть хотя бы в одну проигрышную позицию, однако из неё можно попасть только в позиции (1, 2, ... 998, 999, (0, 998)), которые все по предположению выигрышные, то есть в случае, где у первого игрока проигрышная позиция, возникает противоречие ⇒

⇒ у первого выигрышная позиция ⇒ при правильной игре Петя гарантированно выигрывает.

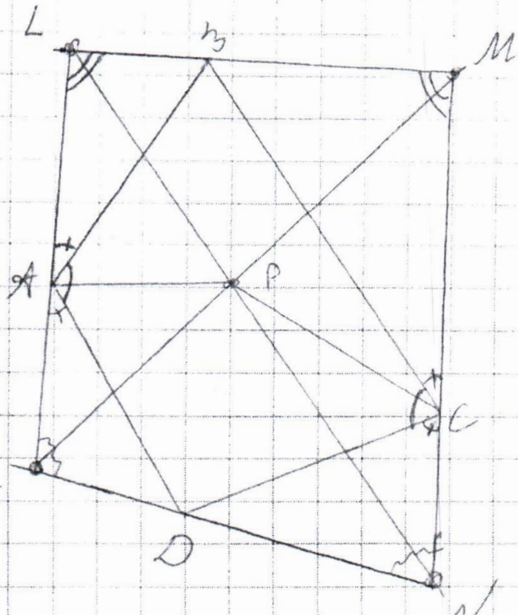
Ответ: Петя.

ЗАДАЧА № 2.4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-02-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№4.

Предположим, что такое n существует, тогда $n \vdots a,b,c$, $(a-1)(b-1)(c-1) \vdots n^2$, а т.к. a и $a-1$ взаимно простые и $n^2 \vdots a^2$, то $(a-1)(b-1)(c-1) \vdots n^2 \vdots a^2 \Rightarrow (b-1)(c-1) \vdots a^2$, аналогично $(a-1)(c-1) \vdots b^2$ и $(b-1)(a-1) \vdots c^2$, тогда если перемножить три выражения, то получится $(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2$, которые ~~по услов~~ должны делиться на $(abc)^2$, тогда т.к. и $(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2$ и $(abc)^2$ - это квадраты, то и $(a-1)(b-1)(c-1)$ тоже должно делиться на abc, но т.к. $a-1<a$ $b-1<b$ и $c-1<c$, то такое невозможно $\Rightarrow$ не существуют такие n.

ЗАДАЧА № 2.5	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-02-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Поскольку ~~вне~~ KL – внешняя биссектриса A, то $\angle LAB = \frac{180 - \angle A}{2} = \angle \hat{A}KD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle C = \angle A$, то $\angle LAB = \angle \hat{A}KD = \angle DCN = \angle MCB$, аналогично $\angle ABL = \angle CBM$ и $\angle ADK = \angle CDN$, тогда $\angle ALB = 180^\circ - \angle LAB - \angle LBA = 180^\circ - \angle CBM - \angle MCB = \angle BMC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle L = \angle M$, аналогично $\angle K = \angle N \Rightarrow 360^\circ = \angle L + \angle M + \angle K + \angle N = 2\angle L + 2\angle N \Rightarrow \angle L + \angle N = 180^\circ \Rightarrow KLMN$ – вписанный в окружность четырёхугольник, тогда

$\angle KLM = \frac{\breve{KNM}}{2} = \frac{\breve{KN}}{2} + \frac{\breve{NM}}{2}$ и ~~$\angle M$~~ $\angle L = \angle M = \frac{\breve{KN}}{2} + \frac{\breve{LK}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \breve{KL} = \breve{MN} \Rightarrow LK = MN$, тогда можно заметить, что $\angle LKP = \angle PNM$ и $\angle KLP = \angle NMP$, т.к. смотрят на одну и ту же дугу $\Rightarrow \triangle LPK = \triangle MPN$ по 2-му признаку равенства $\triangle \Rightarrow LP = MP$ и $KP = PN \Rightarrow$

$\Rightarrow LN = LP + PN = MP + PK = MK \Rightarrow LN = MK \Rightarrow \breve{LN} = \breve{MK} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\breve{LKN} = \breve{MLK}$ $\breve{LMN} = \breve{MN} + \breve{LM}$~~ $\breve{MLK} = \breve{ML} + \breve{L}$ $\angle LPK =$

$\breve{LK}/2 + \breve{MN}/2 = \breve{LK} =$ ~~$180 - \angle LKP - \angle KLP$~~ $\Rightarrow P$ – центр окр.

не центр окруж.!

ЗАДАЧА № 9. 5	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-02-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$\Rightarrow PL = PK$ (радиусы) $= PM = PN$, $\smile LM = \smile KN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle L = \angle M = \angle N = \angle K \Rightarrow AP$ - биссектриса $\angle A \Rightarrow \angle LAP =$

$\angle KAP = 90°$, аналогично $\angle PCM = \angle PCN = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MCP = \triangle LAP \Rightarrow AP = PC$.

9.6	9.7	9.8	9.9	9.10
7	7	0	0	–

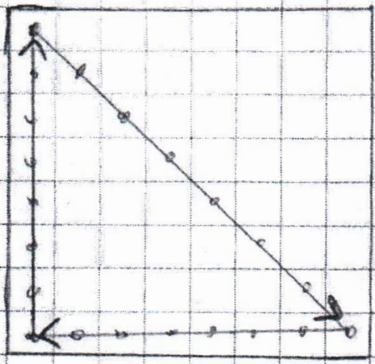
Итого: 28б + 14б = 42б

ЗАДАЧА № 9. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-09-02-2
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№6.

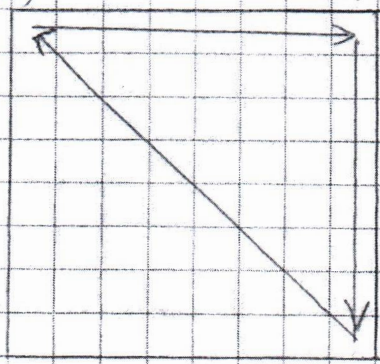
Ответ: нет, не обязательно.

Пример: 1)

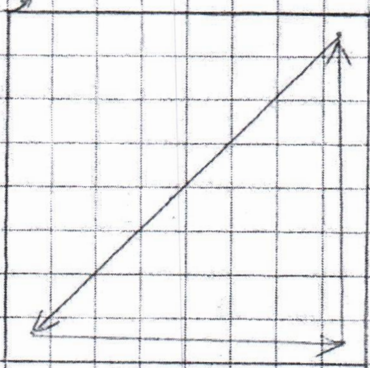


Начальная клетка: любая из угловых в конкретном случае

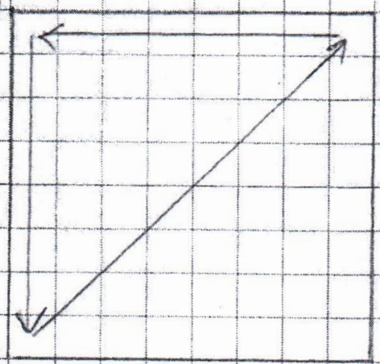
2)



3)



4)



ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-09-02-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№7

$\frac{a}{p}+\frac{p}{b}=2$ $a,b,p\in N$, $p\neq 2$, p - простое.

$a<2p$ иначе $\frac{a}{p}>2=\frac{a}{p}+\frac{p}{b}>\frac{a}{p}$?!

$b>0{,}5p$ иначе $\frac{p}{b}>2=\frac{a}{p}+\frac{p}{b}>\frac{p}{b}$?!

а поскольку p - нечётное, то $p>2\Rightarrow b>0{,}5p>1$,

$0<a<2p$.

Тогда рассмотрим все случаи для a

1) $a=kp$ $k\in N \Rightarrow a=p$

2) $a=kp+r$ ($r<p$) $k\in(N,0)$ - натуральное или 0

2) $a=p+r$ → 3) $a=r<p$

1) $a=p$, тогда $1+\frac{p}{b}=2$ $\frac{p}{b}=1$ $b=p$

2) $a=p+r$ $\frac{p+r}{p}+\frac{p}{b}=2$ $1+\frac{r}{p}+\frac{p}{b}=2$ $\frac{r}{p}+\frac{p}{b}=1 \,|\cdot pb$

$br+p^2=pb$ $p^2=b(p-r)$ $p\in N$, $b\in N \Rightarrow$

$\Rightarrow p-r\in N$ и $p-r<p$, а т.к. у p^2 делители только $p^2, p, 1$, т.к. p - простое, то $p-r=1$

$r=p-1\Rightarrow a=p+r=2p-1$ $p^2=b(p-r)=1\cdot b\Rightarrow b=p^2$

3) $a=r<p$ $\frac{r}{p}+\frac{p}{b}=2 \,|\cdot pb$ $br+p^2=2bp$

$p^2=b(2p-r)$, тогда $2p-r>p$, но т.к. $p>2$, то $2p-r<p^2$

ЗАДАЧА № 9. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2	M-09-02-2
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

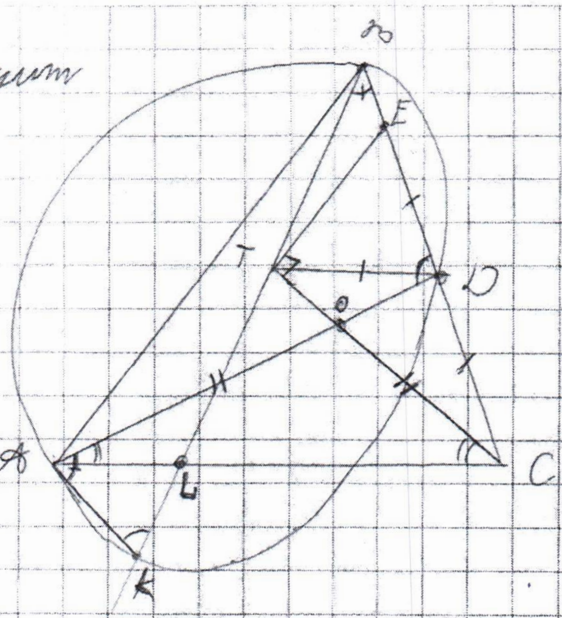
№7

$\Rightarrow$ $2p-1$ не может являться делителем p^2

$\Rightarrow$ данное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Ответ (a,b): (p,p); $(2p-1, p^2)$

ЗАДАЧА № 9. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-09-02-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Во первых, т. к. K лежит на окружности, описанной около ABD, то $\angle AKB = \angle ADB =)$ т.к. смотрят на одну дугу $\breve{AB}$, аналогично $\angle DAK = \angle KBC = 7$.

Также поскольку O - центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, то AO и OC - радиусы $\Rightarrow AO = OC \Rightarrow \triangle AOC$ - р/б $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA =)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DOC = 2))$, т.к. внешний к $\triangle AOC$, тогда $\angle ODE = \angle DOC + \angle DCO = 2)) + \angle DCO =)$, т.к. внешний к $\triangle ODC$ $\angle KTO = \angle CBK + \angle TCB = 7 + \angle DCO$

~~Тогда в $\triangle CBL$ $180° = 7 +)) + \angle DCO =$~~

Тогда можем провести медиану в $\triangle ETC$ к стороне EC, тогда это будет TD и $TD = ED = DC$
$\Rightarrow$ в $\triangle TDC$ $\angle CTD = \angle DCO = \alpha$, тогда $\angle DET =$
$\angle ETD = 90° - \angle DTO = 90 - \alpha$

ЗАДАЧА № 9. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-09-02-2
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№ 9

$$\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{ab-1}{b}\right)\left(\frac{bc-1}{c}\right)\left(\frac{ac-1}{a}\right)=1$$

$(ab-1)(bc-1)(ac-1)=abc>1$, т. к. $a, b, c>1$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-6\geq$$

$$\geq\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)+\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}+\frac{(a^2-1)(c^2-1)}{ac}+\frac{(b^2-1)(c^2-1)}{bc}\overset{?}{\geq}\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=$$

$$=\frac{b^2c+c^2a+a^2c}{abc}=\frac{b^2c+c^2a+a^2c}{(ab-1)(bc-1)(ac-1)}$$