N1-7б N2-7б N3-7б N4-7б N5-7б

ЗАДАЧА № 8.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

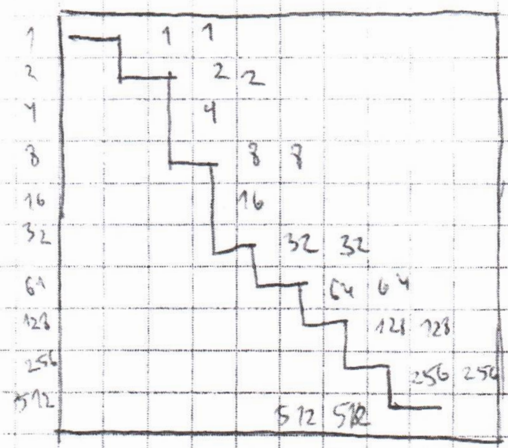


рис. 1

Пойдем по маршруту, отмеченным линией на рис. 1. Тогда, сумма чисел во всех пройденных клетках будет равна:

$(1+1)+(2+2+4)+(8+8+16)+(32+32)+(64+64)+$
$+(128+128)+(256+256)+(512+512)=$

$=2+8+32+64+128+256+512+1024=$

$=2047-1-4-16=2047-21=2026$

Ответ: см. рис. 1 (маршрут - линия)

ЗАДАЧА № 8 . 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Из: $a^2+b^2>(a+b)^2$ следует:

$a^2+b^2>a^2+2ab+b^2 \Rightarrow 0>2ab \Rightarrow ab<0$.

Из $b^2+c^2>(b+c)^2$ следует:

$b^2+c^2>b^2+2bc+c^2 \Rightarrow 0>2bc \Rightarrow bc<0$.

(из этого всего еще следует, что $a\neq0$, $b\neq0$ и $c\neq0$)

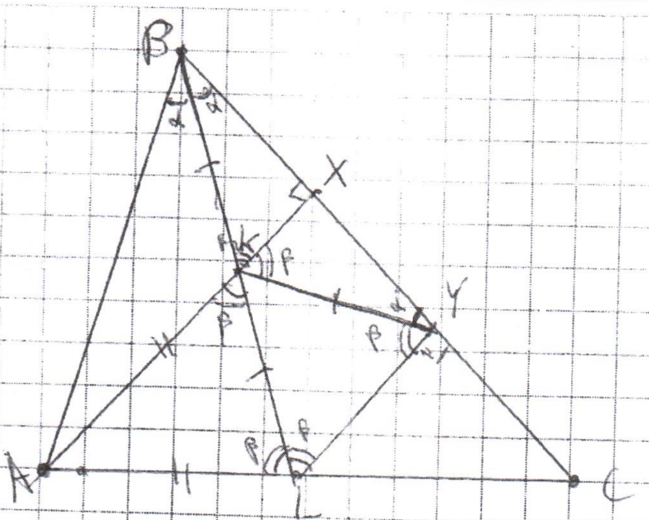
Из этих двух неравенств можно заметить, что b и a - разного знака (т.е. одно из них >0, а другое <0), (т.к. $ab<0$), а также b и c - разного знака (т.к. $bc<0$). Значит, a и c - одного знака (т.к. если $b>0$, то $a<0$ и $c<0$, иначе если $b<0$, то $a>0$ и $c>0$), а значит $ac>0$.

Заметим, что $(a+c)^4=a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^3+c^4=$
$=(a^4+c^4)+4\cdot a^2\cdot ac+6\cdot(ac)^2+4\cdot c^2\cdot ac$. Теперь заметим, что $4\cdot a^2\cdot ac>0$ (т.к. $4>0$, $a^2>0$ и $ac>0$); $6\cdot(ac)^2>0$ (т.к. $6>0$ и $(ac)^2>0$); и $4\cdot c^2\cdot ac>0$ (т.к. $4>0$, $c^2>0$ и $ac>0$).

Значит, $(a+c)^4=(a^4+c^4)+(4\cdot a^2\cdot ac+6\cdot(ac)^2+4\cdot c^2\cdot ac)$, где $(4\cdot a^2\cdot ac+6\cdot(ac)^2+4\cdot c^2\cdot ac)>0$ (т.к. каждое из слагаемых >0), а тогда $(a+c)^4>a^4+c^4$.

Ответ: $(a+c)^4$ больше, чем a^4+c^4.

ЗАДАЧА № 8 . 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Обозначим т. пересечения продолжения отр. AK с BC – X. (тогда по условию $\angle AXB = 90°$)

Проведем из L ~~отрезок LY так,~~ прямую, параллельную AX. Ее т. пересечения с BC обозначим Y. Тогда, из $LY \parallel AX \Rightarrow \angle LYB = 90°$. Теперь обозначим $\frac{1}{2}$ угла $\angle ABC$ за α ($\angle ABL = \alpha$), а проведем отрезок KY (из того, что $\triangle BYL$ – ◺ и K в нем – середина гипотенузы $\Rightarrow KY = \frac{1}{2} LB = KL$) и обозначим $\angle KYL = \angle KLY$ как β ($\triangle LKY$ – △ т.к. AK=AL). Тогда, из того, что $LY \parallel AX$, $\angle AKL = \angle KLY = \beta$ (как накр. лежащие), а дальше из того, что $AK = AL \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle KAL$ – △ $\angle ALK = \angle AKL = \beta$. Рассмотрим $\triangle BAL$ и $\triangle BYL$. BL у них общая сторона, $\angle ABL = \angle LBY = \alpha$, $\angle ALB = \angle BLY = \beta \Rightarrow \triangle BAL = \triangle BYL$ по стороне и прилежащим к ней углам. Тогда, $\angle BAL = 90° \Rightarrow \triangle BAL$ – ◺ $\Rightarrow$
$\Rightarrow AK = \frac{1}{2} BL = KL \Rightarrow AK = KL = AL \Rightarrow \triangle AKL$ – равносторонний

ЗАДАЧА № 8. 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-08-05-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

и $\angle ALK = 60^\circ$. Тогда, $\angle ABL = 90^\circ - \angle BLA = 90^\circ - \angle ALK =$
$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 2\alpha = 60^\circ$.
Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

ЗАДАЧА № 8 . 4	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Будем рассматривать величину, равную: (сумма чисел в верхней строке) − (сумма чисел в нижней строке).

Заметим, что это полуинвариант. Действительно, меняя в каком-то столбце числа местами (пусть изначально сверху стояло a, а снизу − b, тогда $a > b$), эта величина уменьшится на $a-b+a-b$ (сверху стояло a, стало b, снизу стояло b, стало a) $= 2(a-b) \geq 2\cdot 1$, а это всегда хотя бы 2. (а от перемешивания чисел в строке их сумма не меняется)

Таким образом, эта величина − действительно полуинвариант, всегда уменьшающийся хотя бы на 2 (за 1 день). Рассмотрим её максимальное и минимальное возможные значения:

- Максимальное: Оно достигается, когда сверху стоит набор чисел с максимально возможной суммой, а снизу − с минимальной (а тогда сверху находятся числа от $n+1$ до $2n$, а снизу от 1 до n). В таком случае, эта величина равна: $\underbrace{\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)}_{\text{сумма от } n+1 \text{ до } 2n} - \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{сумма от 1 до } n} = n(2n+1) - n(n+1) =$

ЗАДАЧА № 8. 4	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$= n(2n+1-(n+1)) = n^2$.

• Минимальное возможное значение:

Оно, очевидно, противоположно по знаку максимальному, т.к. чтобы ~~его~~ его достичь, мы можем в максимальном случае просто поменять строки местами. Значит, оно равно $-n^2$
(если значение величины станет минимальным, процесс закончится, т.к. уменьшить её уже нельзя)

Выходит, за весь процесс, начиная с первого дня эта величина суммарно уменьшится не более, чем на $n^2-(-n^2)=2n^2$ (из макс возможного начального значения мы вычли мин. возможное конечное).

Каждый день ~~этот~~ получившаяся уменьшается хотя бы на 2, (а может и на большее число, но никак не на меньшее), а значит процесс длится не более, чем
$\frac{2n^2}{2} = n^2$ дней, ЧТD.

ЗАДАЧА № 8. 5	ЛИСТ 1 ИЗ 1	М-08-05-1
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Задача симметрична относительно перестановки a, b и c, поэтому скажем, не умоляя общности $1 < a \le b \le c$. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись, тогда:

$n \vdots a$, $n \vdots b$, $n \vdots c$ и $(a-1)(b-1)(c-1) \vdots n^2$

Из $n \vdots c$ следует, что $n^2 \vdots c^2 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) \vdots c^2$.

$c-1$ взаимнопросто с c, а значит и $c-1$ взаимнопросто с c^2 (т.к. $c>1$, если $c \vdots p$, $(p \ne 1)$ то $c-1 \not\vdots p$). Из этого факта можно записать:

$(a-1)(b-1) \vdots c^2 \Rightarrow (a-1)(b-1) = c \cdot c \cdot k$, где

$k \ne 0$ т.к. $a > 1$ и $b > 1$ $\Rightarrow c \cdot c \cdot k \ge c \cdot c \Rightarrow (a-1)(b-1) \ge c \cdot c$)

(т.к. мы их упорядочили и $a \le c$ и $b \le c$)

Но $a-1 < c$ и $b-1 < c$, а тогда $(a-1)(b-1) < c \cdot c$

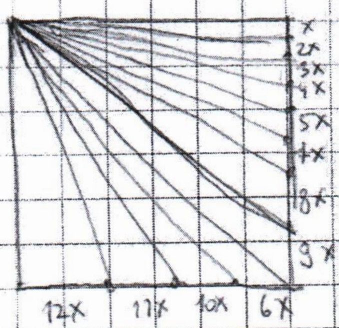
Это противоречит тому, что $(a-1)(b-1) \ge c \cdot c$ а значит мы пришли к противоречию в целом. Выходит, что таких n, не существует.

Ответ: нет, не существует

N6 – 7б N7 – ~~8б~~ 7 N8 – 4б N9 – 0б N10 – 0б

ЗАДАЧА № 8 . 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-08-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть сторона квадрата, который мы делим, будет равна 1. Тогда обозначим $\frac{2}{12\cdot\frac{(12+1)}{2}} = \frac{1}{39}$ за x. Тогда поделим квадрат таким образом (все линии считать прямыми)



Высоты на известные стороны в всех этих треугольниках равны 1, а тогда их площади относятся как их стороны (которые с x), а это то, что нам нужно.

Ответ: см. рис.

ЗАДАЧА № 8.7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Предположим, что на доске есть 3 числа различных цветов. Обозначим их как a, b и c. Тогда заметим, что рассмотрев любое простое от 100 до 1000000, хотя бы одно из a, b и c обязано на него делиться, кроме, возможно одного простого (т.к. если их хотя бы 2, то можно составить тройку: из чисел p_1, p_2, a, p_1, p_2, b и p_1, p_2, c, а тогда a, b и c - одинаковые)

Тогда abc делится на все простые от 100 до 1000000, (кроме одного) а значит $abc \geq$ произведение этих простых, а это очевидно больше $1000000^3 \geq abc$, противоречие.

Значит на доске (имеется ввиду, что числа выписаны на доску) максимум 2 цвета.

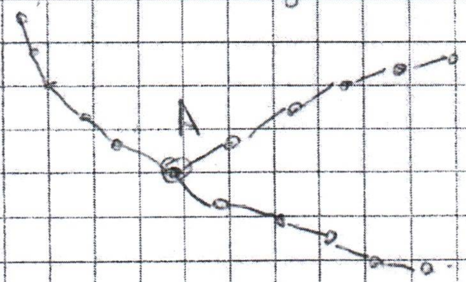
Те же самые рассуждения можно проверить и про числа a и b разных цветов (тогда ab должно делиться на все простые ≥ 100 и $\leq 10^6$ кроме одного, но тогда $ab > 10^{12}$), а значит не может найтись a и b разных цветов, а значит цвет всех чисел одинаков.

ЗАДАЧА № 8.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Оценка.

Заметим, что весь автодром можно условно поделить на 2 части: перекрестки, в которых сходятся по 3 дороги (4×6) и соединяющие их цепочки (9 цепочек по 5 перекрестков степени 2)

Рассмотрим произвольный перекресток A степени 3 и на цепочки, связанные с ним.



Заметим, что ~~все~~ если в данный момент на какой-то смежной с A цепочке машина движется в его сторону, то дальше она обязательно будет через него проехать (не позднее чем через 5 мин) т.к. развернуться она не может по условию! (и она проезжает 1 отрезок за 1 мин)

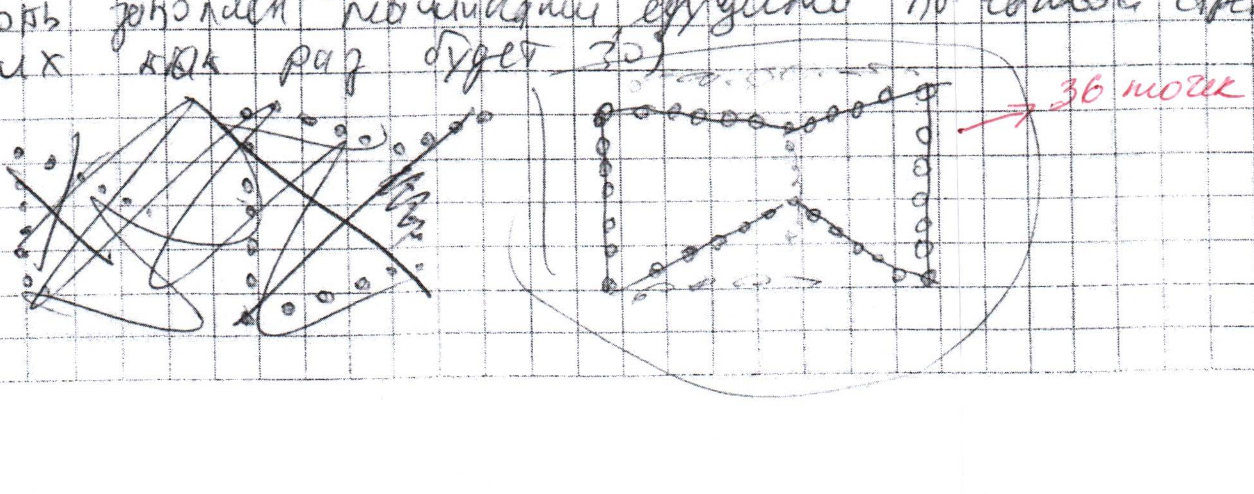
~~Значит~~ Также, если ~~на~~ машина на смежной с A цепочке едет в направлении от A (рассматриваем момент времени ≥ 5 мин) то она обязана была когда-то проехать через A (не ранее, чем ~~через~~ за 5 мин до этого (т.к. проезжает 1 отр за 1 мин)

ЗАДАЧА № 8. 8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Тогда, машин, которые сейчас едут в направлении к A на смежных цепях не более, чем 5 (так как за 1 мин через A может проехать не более 1 машины, а все машины должны проехать к A в этих пределах), а машин, которые едут на смежных цепях от A не более 5 (т.к. в пределах 5 мин они должны были проехать через A). Значит, суммарно на 3 смежных с A цепочках не более, чем 10 машин. Значит, на всем автодроме не более, чем $10 \cdot 6 : 2 = 30$ машин (так как каждая машина в текущий момент едет от какого-то перекрестка к какому-то, и учитывается дважды). Это и есть оценка.

Пример:

Выделим цикл, который полностью может быть заполнен машинами едущими по часовой стрелке (их как раз будет 30)



ЗАДАЧА № 8.9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

И т. $a^2+b^2=c^2+d^2$.

$(a+b)^2+2ab=(c+d)^2-2cd \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b)^2-(c+d)^2=2(ab-cd) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b+c+d)(a+b-c-d)=2ab-2cd \Rightarrow$

$\Rightarrow n(a+b+c+d)=a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd \Rightarrow$

$\Rightarrow n(a+b+c+d)=(a+b)^2-(c+d)^2$, а также

$n(a+b+c+d)=(c-d)^2-(a-b)^2$

Ещё при условии, (не умоляя общности), что $a\geq b$ и $c\geq d$, выходит, что либо

$a\geq c\geq d\geq b$ либо $c\geq a\geq b\geq d$

(иначе $a^2+b^2\neq c^2+d^2$)

ЗАДАЧА № 8.10	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-08-05-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Отметим т. X на продолжении AB за A так, что $AX = BD + BE$. Тогда, $BX = AB + BD + BE = CE + BE =$
$= BC \Rightarrow XBC$ – равностор.

Ещё отметим т. Y на AB так, что $BY = BD$ и в $\triangle DEB$ удвоим медиану EB в т. E'.
Тогда $YE' = DE$.

~~Отметим~~