10.1 – 7б., 10.2 – 4 б., 10.3 –, 10.4 –, 10.5 – / 11б.

ЗАДАЧА № 10. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть эти числа – $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда обозначим их следующим образом:

$a = n+1$ $\quad \frac{a}{b+c} = \frac{n+1}{n+n+2} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$

$b = n$

$c = n+2$ $\quad +$

$d = n+4$ $\quad \frac{d}{e+f} = \frac{n+4}{n+3+n+5} = \frac{n+4}{2n+8} = \frac{1}{2}$

$e = n+3$

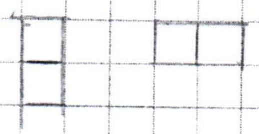
$f = n+5$ $\quad \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{d}{e+f} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \in \mathbb{N}$

ч.т.д.

7 баллов

ЗАДАЧА № 10. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Для того, чтобы доказать, что $S \le 2D$, сделаем следующее: докажем, ~~что для каждой расстановки Саши можно поставить в соответствие хотя бы две различные расстановки Даши, при этом все расстановки Даши различны (иначе говоря, различным расстановкам Саши соответствуют различные расстановки Даши~~, что каждой расстановке Даши соответствует не более двух различных расстановок Саши, из чего будет следовать, что $S \le 2D$. Рассмотрим какую-то произвольную расстановку Даши. По ней расстановка Саши „восстанавливается" так. Саша ~~ставит в~~ красит „центральную"

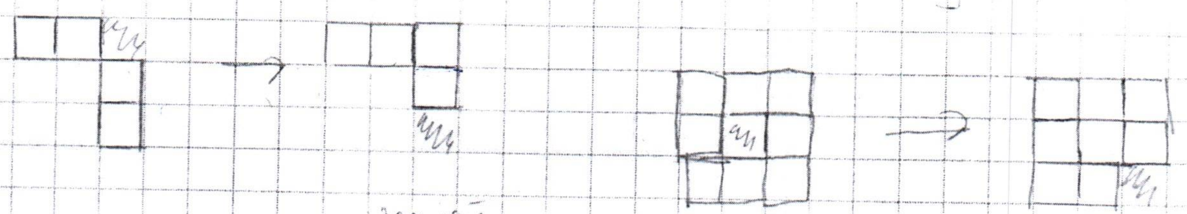


(как показано на рисунке), таким образом восстанавливаются 40 из 40 границ, ~~Хен~~ а в оставшейся клетке он красит любую из границ. Рассмотрим ~~эту клетку подробнее~~

н.у.о. считаем, что в нашей иллюстрации Саша покрасил данную границу

ЗАДАЧА № 10. 2	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Тогда у нас останется ровно одна клетка, у которой закрашено две границы. Покажем, как можно перевести Дашину расстановку в новую, сохранив при этом Сашину расстановку.



При ~~данной~~ произвольной расстановке Сашин у Саши есть ≤4 способа закрасить границу оставшейся свободной клетки, это и различные раскраски, но при этом при этих четырех различных раскрасках существует хотя бы 2 различные расстановки Даши, что мы показали выше, ⇒

⇒ каждой расстановке Сашин соответствует ≤2 различных расстановок Сашин, ч.т.д.

4 балла

10.6 – 7б., 10.7 – 7б., 10.8 – 4б., 10.9 – 0б., 10.10 – / 18б.

ЗАДАЧА № 10. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть Петя расставил числа $n, n+1, \ldots n+15$, где $n \in \mathbb{N}$, а получил суммы: $2n+k, 2n+k+1, \ldots 2n+k+7$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \in [\underset{\substack{n+n+1 \\ (\text{при } n \text{ и } n+1)}}{1}; \underset{\substack{n+n+15 \\ (\text{при } n+14 \text{ и } n+15)}}{29}]$. Тогда посчитаем сумму чисел расставленных изначально, и полученных после вычислений:

Изначально: $n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+15) = 16n + \frac{15 \cdot 16}{2} = 16n+120$

После вычислений: $(2n+k)+(2n+k+1)+\ldots+(2n+k+7) = 16n+8k+\frac{7 \cdot 8}{2} = 16n+8k+28$

Ясно, что после проделанных Петей операций сумма чисел не изменилась, поэтому приравняем

$$16n+120 = 16n+8k+28$$

$$8k+28 = 120$$

$$8k = 92$$

$k = \frac{92}{8} \notin \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ ответ на вопрос задачи: нет, не могло

7 баллов

ЗАДАЧА № 10. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$ax+by+c=0$

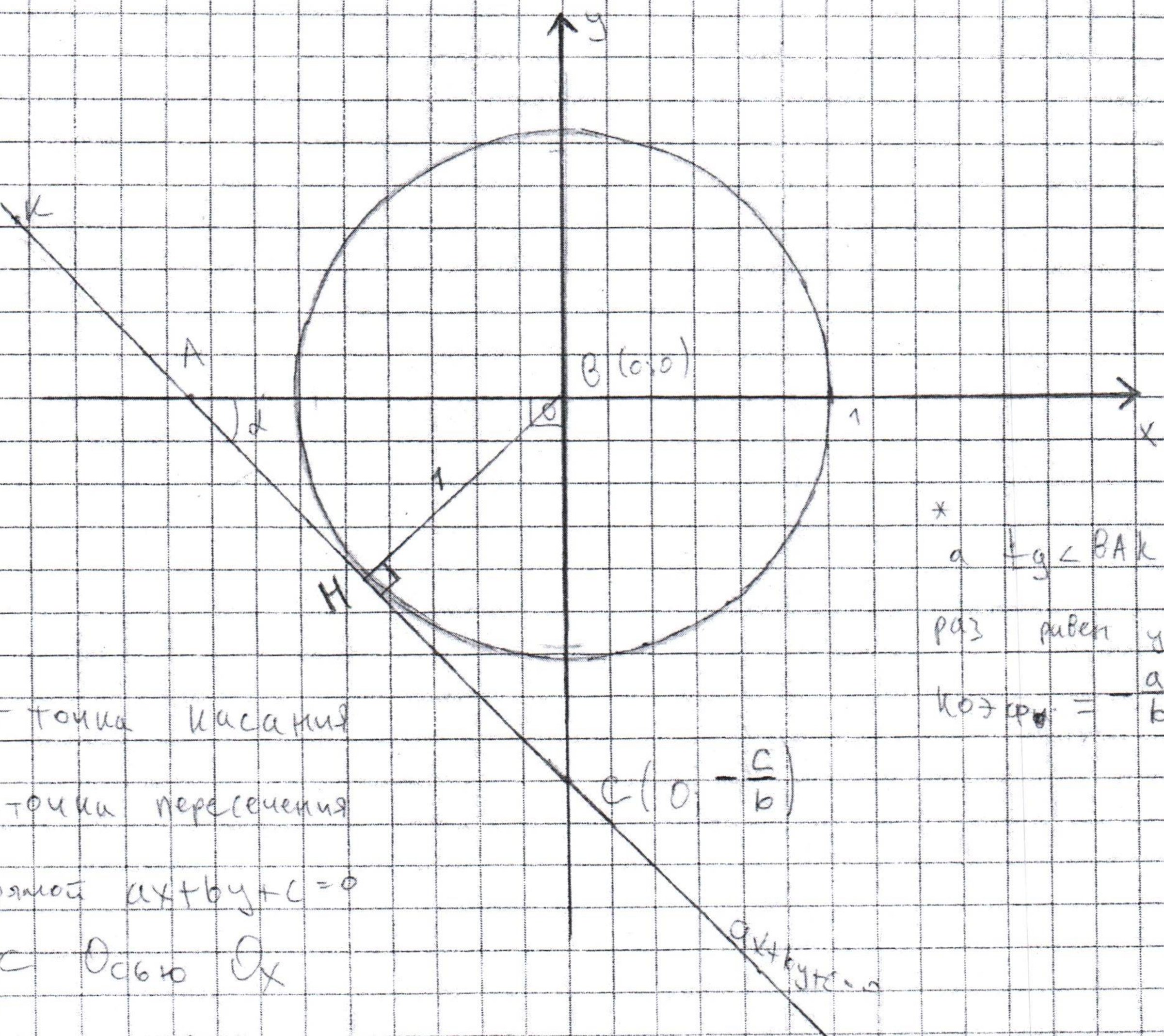
$by=-ax-c$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ $\quad a,b,c>0, \Rightarrow -\frac{a}{b}<0, \ -\frac{c}{b}<0,$

$\Rightarrow$ прямая направлена вниз (убывающая)

и пересекает Oy ниже оси Ox

$\boxed{y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}}$



* а $tg\angle BAK$ как раз равен угловому коэфф. $=-\frac{a}{b}$

H - точка касания

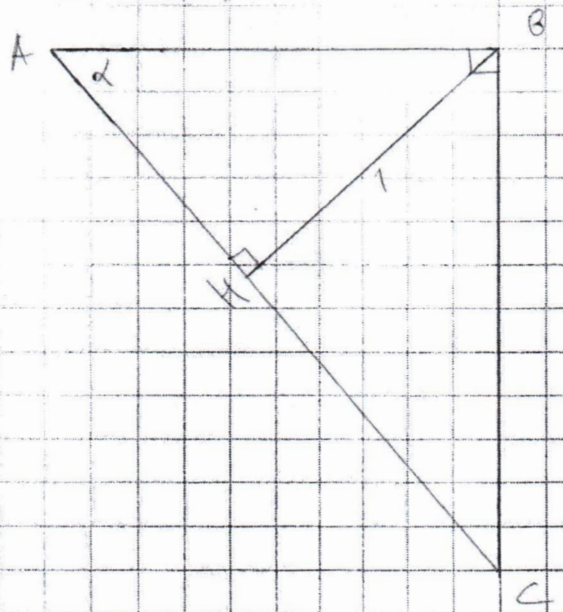
A - точка пересечения прямой $ax+by+c=0$ с осью Ox

$tg\,\alpha=\left|-\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{b}$ $\quad$ т.к. $\alpha+\angle BAK=180°$

На всякий случай обоснуем $tg\,\alpha = -tg\angle BAK^{*}=-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$

ЗАДАЧА № 10 . 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

∡ △ABC



$CB = \frac{c}{b}$

$tg\alpha = \frac{CB}{AB}$

$AB = \frac{CB}{tg\alpha} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{a}$

~~cos~~ $\sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}$

$AC = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c^2}{ab}$

По т. Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\frac{c^4}{a^2b^2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^2b^2 + c^2a^2}{a^2b^2} = \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$

$\frac{c^4 - c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2} = 0$

$\frac{c^2(c^2-a^2-b^2)}{a^2b^2} = 0$ $\quad c \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq 0$ т.к. $a, b, c > 0$

$\Rightarrow c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \Rightarrow$

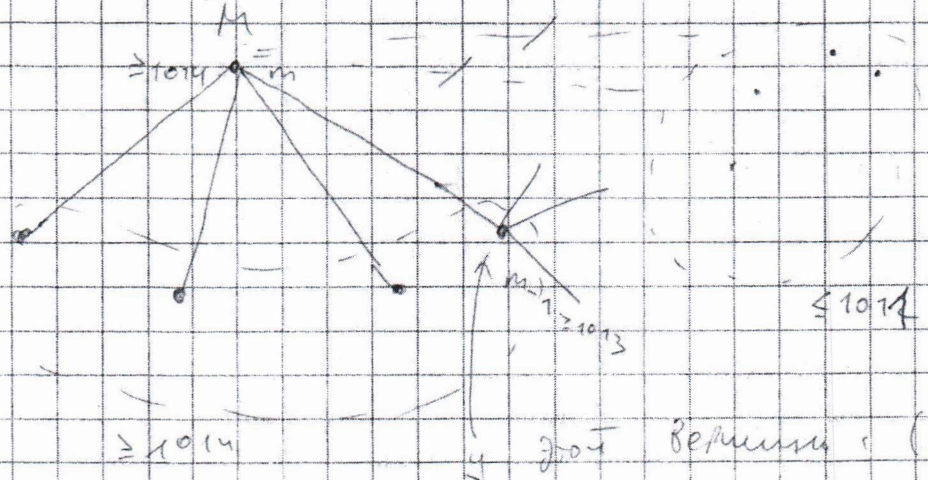
$\Rightarrow$ по теореме, обратной теореме Пифагора, из отрезков длиной a, b, c действительно можно сложить прямоугольный треугольник, ч.т.д.

7 баллов

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-10-03-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Будем рассматривать ситуацию, описанную в условии задачи, как граф. Тогда в нем 2026 вершин, ~~любых~~ у любых 2 вершин, соединенных ребром, степени отличаются ровно на 1. Спрашивается, какое максимальное количество ребер может быть в таком графе.

1) К вершину с максимальной степенью m. $m \le 1013$, т.к. иначе:



у этой вершины (и у любой другой из множества друзей вершины M) хотя бы одно ребро попадет обратно в множество друзей M (не друзей M ≤1011, а у каждой вершины из друзей M степень ≥1012 (не считая ребра к M), что невозможно, т.к. у друзей M у всех одинаковая степень $m-1$.

Пункт 2 считать записанным раньше пункта 3

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

3) Существует пример на 1012 · 1013 ребер (двудольный граф с 1012 и 1013 вершинами в долях, вершины внутри доли не соединены между собой (никакие две), все вершины одной доли соединены со всеми вершинами другой доли. Один из математиков с 0 друзей) Теперь докажем, что это наибольшее возможное число ребер.

2) Заметим что вершин со степенью 1013 не больше 1013 (иначе какие-то две соединены между собой) 1013 их также быть не может, т.к. в таком случае все их друзья - общие (проще говоря, внутри доли нет ребер граф бьется на две доли, в каждой по 1013 вершин, в одной доле у всех вершин степени 1013, => и в другой, но там 1012, противоречие)

4) Во-первых, докажем, что в графе, где max (deg вершины) ≤ 1012 ребер не больше. Действительно

$1012 \cdot 1013 \geq 2026 \cdot 1012 \cdot \frac{1}{2}$

$1012 \cdot 1013 \geq 1013 \cdot 1012$

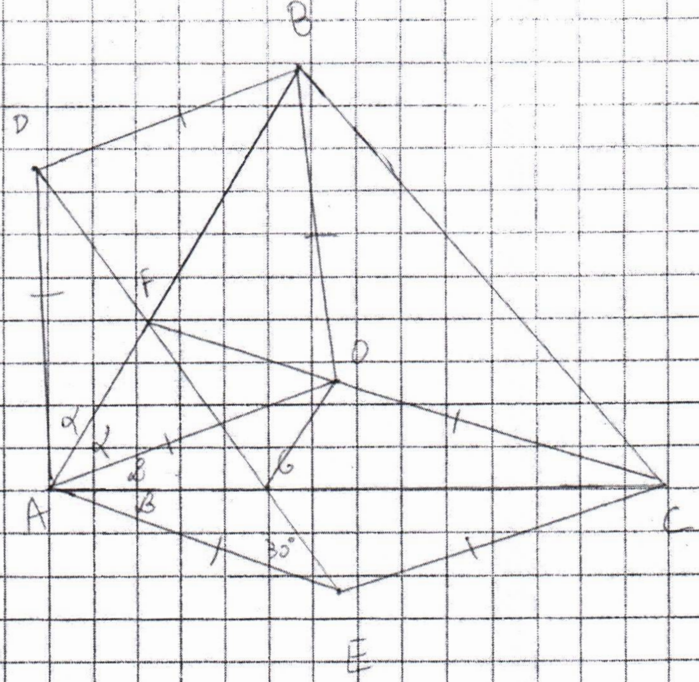
$0 \geq 0$ верно

4 балла

ЗАДАЧА № 10 . 9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-03-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

OA=OB=OC (радиусы), AO=AD, BO=BD, AO=AE, CO=CE

(симметрия



Т.к. AO=AD=AE, то A – центр (DOE)

Т.к. ∠DAE=120 (2(α+β)=2·60), то ∠AED=30° = ∠AOG

из симметрии

Аналогично ∠FOA=30° ∠OCG=β, ∠FBO=α (из симм-

(т.к. Δ-ки р/б) ∠OCG+∠FBO=α+β=60°=∠FOG,

=> (OGC) и (OFB) касаются в точке O,

=> при симметрии т.к. треугольники перейдут в

ΔEGC и ΔDFB соответственно, то их описанные

окружности тоже будут касаться

О баллов