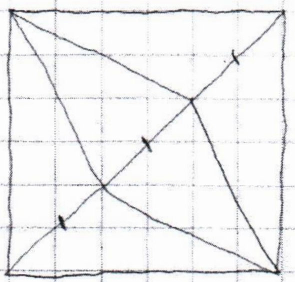
№6-7б №7-отсутствует №8-1б №9-отсутствует №10-0б

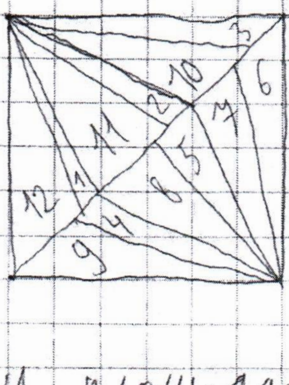
| ЗАДАЧА № 8 . 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 1<br>(листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-08-02-2<br>ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|



Заметим, что у нас есть 6 пар треугольников, и площадь каждой пары — 13.

12+1 9+4
11+2 8+5
10+3 7+6

Значит, квадрат надо разбить на 6 равных частей, каждую из которых может замостить пара треугольников, например, треугольник побольше. Один из вариантов так сделать — это провести диагональ квадрата (разбивает пополам), и затем из противоположных диагонали вершин провести отрезки, делящие её на три равных отрезка. По свойствам площадей, площади получившихся треугольников равны между собой и равны $\frac{78}{2\cdot 3}=13$. Каждый крупный треугольник мостим парой меньших след. образом:




Сумма длин оснований пары треугольников должна равняться $\frac{1}{3}$ диагонали, и ещё отношение площадей должно равняться отношению оснований. Тогда мы гарантируем свойствами площадей, что такое замощение возможно и площади Δ-ов именно такие.

| ЗАДАЧА № 8. 8 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-08-02-2 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
| --- | --- | --- |

Заметим, что три машины, стоящие на соседних перекрёстках никогда не пересекутся, т.к. в любой
и движущиеся в одном направлении
момент времени на одном перекрёстке и дороге не более одной машины. Так как длины отрезков автодрома конечны и машины должны двигаться вечно, значит, условие описывает цикличное движение. Наблюдение, описанное в начале решения верно для любой машины, поэтому ответом задачи является какой-то цикл, на каждом перекрёстке которого стоит машина, движущаяся по циклу вперёд. Также наблюдения выше показывают, что если одна машина может пройти цикл, то и все машины в цикле одновременно способны это сделать. Известно, что в цикле нет ~~более~~ ~~2~~ вершин нечётной степени (~~нечёт.~~ число ~~чисел~~ вариантов, куда машина может переместиться на пересечениях ребер отрезков графа — автодрома для этой задачи везде чётно). Заметим, что в данном графе 6 вершин нечёт. степени, т.е. весь автодром не явл. циклом.

ЗАДАЧА № 8. 8

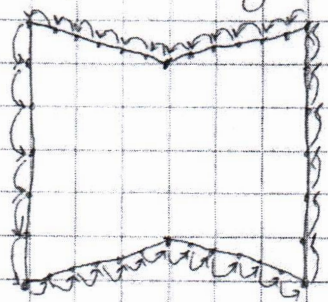
ЛИСТ 2 ИЗ 2

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-08-02-2

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

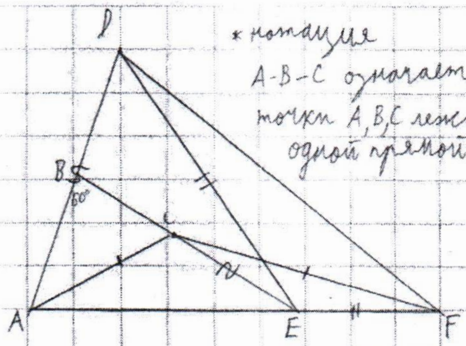
У нас есть 3 соед. пары нечёт вершин, т.е. чтобы от них избавиться, надо убрать 3 ребра графа, соединяющие их. В графе 9 ребер, т.е. останется цикл из 6 рёбер. Вот один из них:



Если в каждый перекрёсток поставить по машине, выйдет 36 машин (Важно: любой цикл из 6 рёбер будет содержать одинаковое число машин, т.к. каждое ребро содержит одинаковое число перекрёстков).

Ответ: 36 машин.

| ЗАДАЧА № 8. 10 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 | М-08-02-2 |
| --- | --- | --- |
| | (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | ШИФР (заполняется оргкомитетом) |



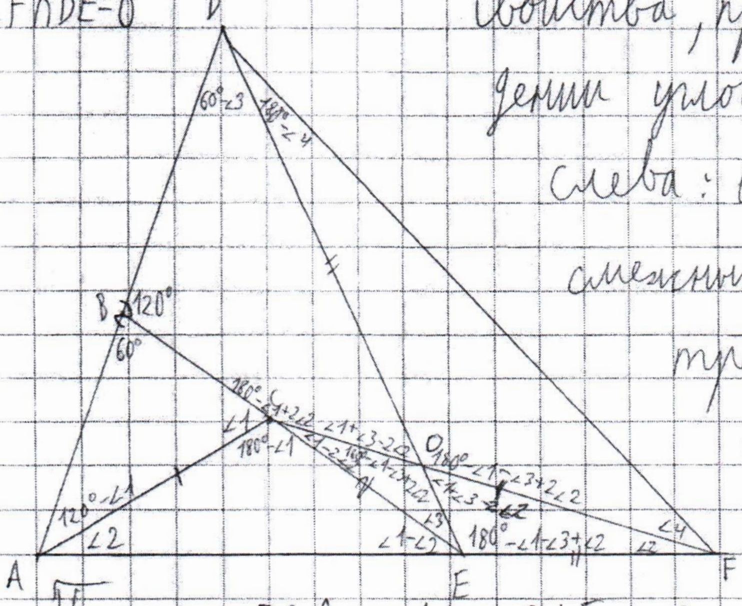

* нотация A-B-C означает, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

Дано: $\Delta ABC$, $\angle B = 60°$, A-B-D*, B-C-E
$AD = CE$, A-E-F, $AC = CF$, $DE = EF$

Найти: $\angle EDF$, $\angle DEF$, $\angle EFD$

Решение:

$CF \cap DE = O$




Свойства, применённые при нахождении углов, отмеченных на чертеже слева: вертик. углы равны, сумма смежных углов $= 180°$, сумма углов треугольника $180°$, в р/б треуг. углы при основании равны.

Пусть $\angle BCA = \angle 1$, $\angle CAE = \angle 2$, $\angle CEO = \angle 3$, $\angle OFD = \angle 4$.

В треугольнике DOF:

$(180° - \angle 4) + \angle 4 + (180° - \angle 1 - \angle 3 + 2\angle 2) = 180°$

$360° - \angle 1 - \angle 3 + 2\angle 2 = 180°$

$\boxed{\angle 1 + \angle 3 - 2\angle 2 = 180°}$ → Значит, $\angle COD = \angle FOE = 180°$, $\angle DOF = \angle COE = 0°$. Это ещё пол беды в этой лавине перед противоречием.

$\angle COD, \angle FOE = 180° \Rightarrow$ C-O-F-D, F-O-E-C $\Rightarrow$ C-O-F-E-D

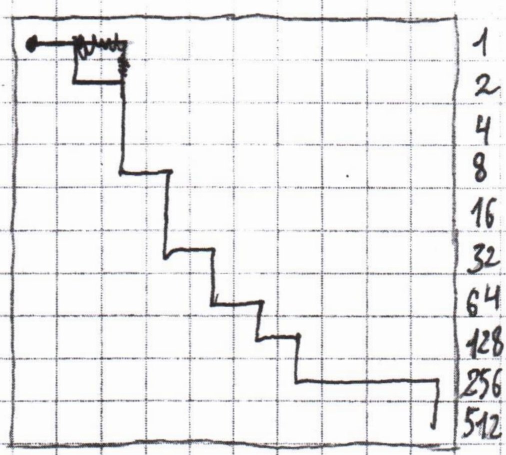
Точки D, E, F лежат на одной прямой $\Rightarrow$ DEF — не треуг. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ условие некорректное.

Ответ: условие некорректное.

№1 – 7б  №2 – 7б  №3 – 7б  №4 – Отсутствует  №5 – 0б

| ЗАДАЧА № 8. 1 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 | М-08-02-1 |
| --- | --- | --- |
| | (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | ШИФР (заполняется оргкомитетом) |

Решение




$2026 = 1\cdot 2 + \overset{\cdot 2}{2} + 4 + 8\cdot 2 + 16 + 32\cdot 2 + 64\cdot 2 + 128\cdot 2 +$

$+ 256\cdot 4 + 512$

| ЗАДАЧА № 8 . 2 | ЛИСТ 1 ИЗ 1<br>(листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | M-08-02-1<br>ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
| --- | --- | --- |

$a^2+b^2>(a+b)^2$

$a^2+b^2>a^2+2ab+b^2$

$0>2ab$

$b^2+c^2>(b+c)^2$

$b^2+c^2>b^2+2bc+c^2$

$0>2bc$

$\Rightarrow$ либо $a,c<0;\ b>0$

либо $a,c>0;\ b<0$

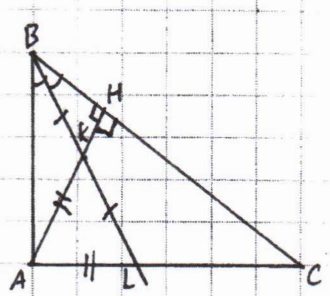
$$(a+c)^4=\underbrace{a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^3+c^4}$$

Все слагаемые положительные!
Произведение 4 отрицательных или положительных ~~слагаем~~ множителей всегда положительно!

$a^4+c^4<(a+c)^4$ (на $4a^3c+6a^2c^2+4ac^3$)

Ответ: $a^4+c^4<(a+c)^4$

| ЗАДАЧА № 8 . 3 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | M-08-02-1 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|



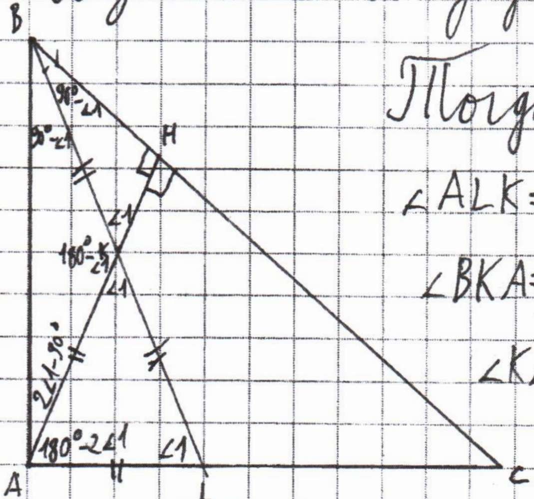

Дано: $\triangle ABC$, $BL$ — биссектриса, $AK=AL$, $AK \perp BC$

Найти: $\angle ABC$

Решение:

Достроим $AK$ до $BC$, $AK \cap BC = H$, $AH \perp BC$ (т.к. $AK \perp BC$).

Обозначим величину ~~угла~~ $\angle BKH = \angle 1$




Тогда $\angle AKL = \angle BKH = \angle 1$ (как вертик.)

$\angle ALK = \angle AKL = \angle 1$ (т.к. $\triangle AKL$ — р/б, $KL$ — основание)

$\angle BKA = 180° - \angle BKH = 180° - \angle 1$ (как смежные)

$\angle KAL = 180° - 2\angle 1$ (по т. о сумме углов $\triangle$)

$\angle KBA = \angle KBH = 90° - \angle 1$ (по т. о сумме углов $\triangle$ и т.к. $BL$ — биссектриса)

$\angle BAK = 180° - (180° - \angle 1) - (90° - \angle 1) = 2\angle 1 - 90°$ (по т. о сумме углов $\triangle$)

$\angle BAL = \angle BAK + \angle KAL =$
$= (2\angle 1 - 90°) + (180° - 2\angle 1) =$
$= 90°$ !

$\triangle BAL$ — прямоуг. (по док-му)
$\angle A = 90°$, $AK$ — медиана, $BL$ — гипотенуза (по усл. и док-му) $\Rightarrow AK = \frac{1}{2}BL = BK = KL$ (по св-ву прямоуг. $\triangle$)

$\triangle AKL$ — равностор (по опр-ю) $\Rightarrow \angle 1 = 60°$ (по св-ву равностор. $\triangle$)

$\angle ABC = 2(90° - \angle 1) = 2(90° - 60°) = 2 \cdot 30° = 60°$

Ответ: $\angle ABC = 60°$

| ЗАДАЧА № 8 . 5 | ЛИСТ 1 ИЗ 1<br>(листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-08-02-1<br>ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Допустим, что $a=\frac{n}{k}$; $b=\frac{n}{l}$; $c=\frac{n}{m}$. $a, b, c \in \mathbb{N}$ ($n, k, l, m$)

Если $(a-1)(b-1)(c-1) \vdots n^2$, то $\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{n^2} \in \mathbb{N}$

Проверим:

$$\frac{(\frac{n}{k}-1)(\frac{n}{l}-1)(\frac{n}{m}-1)}{n^2} = \frac{\left(\frac{n^2-nl-nk+kl}{kl}\right)\left(\frac{n-m}{m}\right)}{n^2} = \frac{n}{klm} - \frac{1}{kl} - \frac{1}{km} + \frac{1}{nk} - \frac{1}{lm} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{nm} - \frac{1}{n^2}$$

Если $\frac{n}{klm}$ достаточно легко сделать натуральным, то остальные дроби — невозможно: $k \geq 1$, $l \geq 2$, $m \geq 3$ (порядок букв для определённости, но он не имеет значения) $\Rightarrow kl \geq 2$.

Знаменатели дробей надо минимизировать, чтобы они сложились в нат. число или уничтожились.

Мин. знаменатели будут при $n=6$, $k=1$, $l=2$ и $m=3$.

Получится выр-е:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}-\frac{1}{36} \notin \mathbb{N}$$

Ответ: нет.