

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	4-11-7
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пример:

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$c = 5$$

$$d = 6$$

Тогда

$$\frac{a+b}{a-b} = -7 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = -9 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{c+d}{c-d} = -11 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{d+a}{d-a} = 3 \in \mathbb{Z}$$

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-7 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
----------------	--	--

Пусть $x \geq 1$. Тогда

$2y > z^2 + x^2$ & введем в квадрат (это безопасно, т.к.
 $2y > z^2 + x^2 \geq 0$)

$$4y^2 > x^4 + z^4 + 2x^2z^2 \quad (1)$$

Теперь выразим y^2 из неравенства $2z > x^2 + y^2$

$$y^2 < 2z - x^2 \quad | \cdot 4$$

$$4y^2 < 8z - 4x^2 \quad (2)$$

Сложим (1) и (2) неравенства в двойное:

$$x^4 + z^4 + 2x^2z^2 < 4y^2 < 8z - 4x^2$$

$$x^4 + z^4 + 2x^2z^2 < 8z - 4x^2$$

$$x^4 + 4x^2 + 2x^2z^2 < 8z - z^4$$

При увеличении значения x на промежутке $x \geq 1$
 значение левой части неравенства будет увеличиваться,
 а значит если правая часть больше левой, то
 правая часть больше минимального значения левой.
 Соответственно, x можно заменить на 1 и неравен-
 ство останется справедливым.

$$5 + 2z^2 < 8z - z^4$$

$$z^4 + 2z^2 - 8z + 5 < 0$$

$$(z-1)^2(z^2+2z+5) \leq 0$$

$$(z-1)^2(z+1)^2+4) \leq 0$$

Это невозможно т.к. $(z-1)^2 \geq 0$ и $(z+1)^2 \geq 0$, значит
при $x \geq 1$ нет действительных значений z , тогда
при $x \geq 1$ исходные неравенства не выполняются.

П.к. исходные неравенства симметричны относительно
 x, y и z , то аналогично доказывается, что
 $y \leq 1$ и $z \leq 1$, з.т.д.

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-7 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
----------------	--	--

Распечатаем доску так, чтобы она имела 2 столбца и 199 строк для удобства.

Чтобы найти максимальные выигрыши при любых ходах Дании, нужно рассмотреть максимальный выигрыш в худшем случае. Он выглядит так:
в каждой из 199 строк находится только одна монетка, а в оставшиеся монет нет. Этот случай худший, т.к. если бы это было не так, то можно было называть монет на поле была бы еще хотя бы одна монетка. Если бы ~~одна~~ она находилась бы на одной из 199 строк, то её бы забрала Соня своим ходом. Если же монетка находилась бы в оставшейся пустой строке, то Дания своим ходом превратила бы монету на соседнюю строку и либо две монеты оказались бы на одной клетке, либо в одной строке оказалось бы 2 монеты, одну из которых заберёт Соня своим следующим ходом. Этот случай возможен в реальной игре и, чтобы его достичь, Дании нужно изначально выбрать 2 соседние строки и совершать ходы исключительно внутри этих строк.

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-Н-7
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Тогда внутри этих 2 строк останется одна монета, а
в каждой оставшейся строке ещё по одной монете, что
и является нужным случаем.

Тогда максимальный выигрыш равен:

$$200 + 1 = 201 \text{ монета}$$

$$((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$$

$$(n-1)! \cdot (n-2)! - n \cdot (n-2)! + 1 = (m-1)^2$$

$$((n-1)! - 1)(n-2)! - 1 = (m-1)^2$$

Отдельно проверим $n=3$:

$$(2! - 1)(1-1) = (m-1)^2$$

$$m=1$$

Теперь при $n > 3$, предположим что правая и левая скобки бракимопросты и докажем это:

$$\text{НОД}((n-1)! - 1, (n-2)! - 1) \stackrel{?}{=} 1$$

$$(n-1)! - 1 \equiv n-2 \pmod{(n-2)! - 1}$$

$$\text{НОД}(n-2; (n-2)! - 1) = \text{НОД}((n-1)! - 1; (n-2)! - 1) \stackrel{?}{=} 1$$

$$(n-2)! - 1 \equiv -1 \pmod{n-2} \Rightarrow \text{значит левый делитель } n-2$$

даст остаток -1 при делении $(n-2)! - 1$, следовательно две изначальные скобки бракимопросты $\Rightarrow$ каждая из них должна быть полным квадратом.

Пусть $(b^2, a^2 > 0)$

$$\begin{cases} (n-2)! - 1 = a^2 \\ (n-1)! - 1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow n = 1 + \frac{b^2 + 1}{a^2 + 1}$$