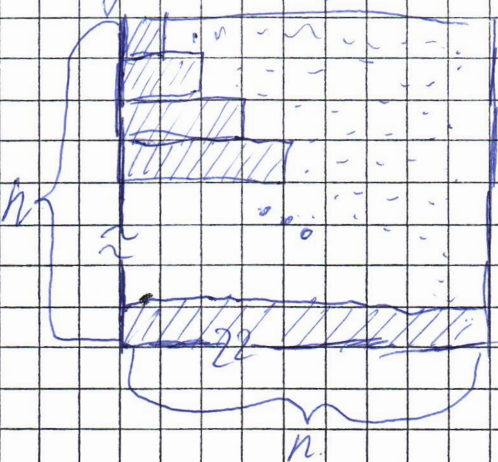
3 балла

ЗАДАЧА № 11. 1.	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть Олег собирает квадрат со стороной n

$1 \leq n \leq 2024$

Тогда он должен использовать единичных n прямоугольников, т.к. к одной из сторон он будет применять сторону длины 1.



Если он использует n фигур, то он точно использует для квадрата прямоуг. со стороной $1 \times n$.

Но тогда остаётся свободное пространство, и он должен использовать ещё фигуры, но если он использует фигур больше чем n, то придётся использовать прямоуг. со стороной больше чем n, а такой прямоуг. не влезет в квадрат со стороной n.

Противоречие, значит это невозможно.

Ответ: нет, не может.

7 баллов (подпись)

ЗАДАЧА № 11.2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-01 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

$x_1 < x_2 < \dots < x_{2024}$ $\{x_1; x_2; \dots; x_{2024}\} \in \mathbb{N}$

0 – число не натуральное, поэтому $x_1 \neq 0$, а также $x_1 \neq 1$ для задачи, т.к. $p_1 = (x_1 - \frac{1}{x_1}) = 0$, а этот множитель есть во всех p_i, тогда все $p_i = 0$.

Т.к. мы хотим максимизировать кол-во натур. чисел p_i, то выберем одну подходящую последовательность $x_1; x_2; \dots; x_{2024}$.

Пусть $x_1 = n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$

а $x_2 = n+1; x_3 = n+2; \dots; x_{2024} = n+2023$.

Тогда $p_{2024} = (n - \frac{1}{n})(n+1 - \frac{1}{n+1}) \dots (n+2023 - \frac{1}{n+2023})$

Преобразуем все множители в такой вид.

$n - \frac{1}{n} = \frac{n^2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{n^2-1}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$

Тогда: $p_{2024} = \frac{(n-1)(n+1)}{n} \cdot \frac{n(n+2)}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)} \cdot \dots \cdot \frac{(n+2021)(n+2023)}{n+2022} \cdot \frac{(n+2022)(n+2024)}{n+2023}$

Все знаменатели сократятся с соседними числителями, и тогда p_{2024} будет произведением натуральных чисел, то есть натуральным числом, это справедливо для всех p_i кроме $i=1$, $p_1 = n - \frac{1}{n}$, ~~n могло бы быть натуральным только при n = 1 и если считать 0 натур. чи~~

Т.к. при любом $n \neq 1$, дробь $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. Получается, что все p_i, кроме p_1 могут быть натур. числа. $2024 - 1 = 2023$.

Ответ: 2023.

1 балл (Серов)

ЗАДАЧА № 11.3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Если найти самую оптимальную стратегию для Бори и посчитать ~~максимальное значение~~ кол-во разноцветных пар при такой стратегии, то это ~~будет~~ и будет наибольшее число пар разноцветных, которое Зоя может себе гарантировать.

Т.к. за 1 ход красится одна точка, то всего будет ~~50~~ 100 ходов. Первый ход делать будет Зоя, а последний Боря. Дальше (С) - точка, покрашенная в синий, (З) - точка, покрашенная в зелёный.

Зоя любым ходом (кроме первого) может добавить +1 пару (С)-(З)

Боря любым ходом (включая первый, но исключая случай когда С О С — последняя точка, тогда он обязательно добавит одну пару.)

может не добавлять пару, докрашивая соседнюю точку в тот же цвет, как и соседнюю ~~точку~~.

В ситуации, когда например, (С)О(С)

Если ход Зои, то она может получить сразу +2 пары

А если ход Бори, то он может сделать 2 пары одноцветные. Поэтому оба игрока будут стараться не допустить этой ситуации для противоположного игрока.

продолжение →

ЗАДАЧА № 11. 3.	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

продолжение.

Всего пары могуть быть 2-ух видов, например
То есть А в сумме пар всего может С О и С В
быть 100, получается цель игры Бори сделать
как можно больше одноцветных пар, а у Зои
как можно больше разноцветных пар.

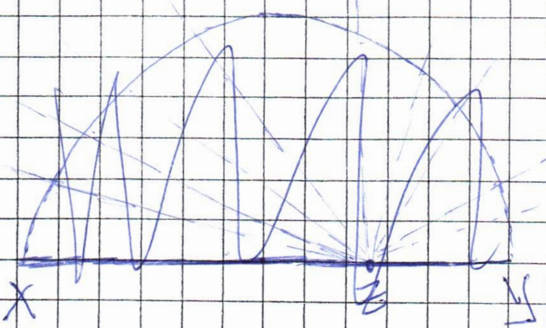
1-вый ход Зои не даёт ей пару.
1-вый ход Бори даёт ~~по~~ +1 пару одноцвет.
Далее каждый за следующий ход получает +1.
А вот последний ход Бори создает сразу 2 пары, всего пар
либо он сделает +1 разноцв. и +1 одноцв., либо +2 одноцв.
В зависимости от О О цветов соседних точек.
И последним ходом Боря создать сразу +2 одноцв. пары,
и поэтому будет 49 разноцв. и 51 одноцв. пар.

~~Ответ~~, Так же возможны тактики, при
которых игрок оставляет сопернику С О З О С
пустые пространства, которые
обязательно сделают +1 пару одноцв и +1 разноцв.
Но при такой игре опять же получается 49 разноцв.
или 50, в зависимости от тактики Бори.
Поэтому именно гарантировать Зоя может только 49 пар.

Ответ: 49 разноцветных пар.

0 баллов [подпись]

ЗАДАЧА № 11.4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

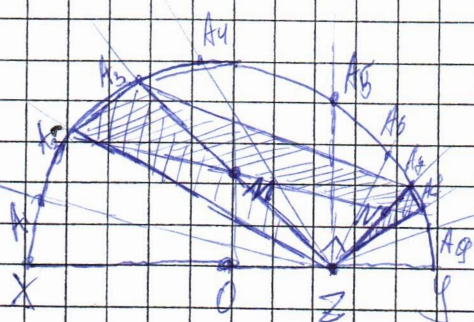


10 равных частей равны по $\frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$.

$\angle XZA_5 = \angle A_6ZY = 90^\circ$.

Так же все дуги через пять точек, т.е. например $\angle A_1ZA_6 = \angle A_2ZA_7 = \angle A_3ZA_8 = 90^\circ$.

10 по



(III) – S треугольников $\triangle A_2A_3Z$ и $\triangle A_7A_8Z$.

(≡) – S четырехуг. $A_2A_3A_7A_8$

прямая A_2A_8 пересекает с прямыми A_3Z и A_7Z, в т. M и N

$\triangle A_2A_3M$ и $\triangle A_7A_8N$ являются частями и (III) и (≡), поэтому достаточно доказать, что $S_{A_3A_7NM} = S_{A_3MZ} + S_{A_7NZ}$.

угол A_3ZA_7 прямой.

0 баллов (подпись)

ЗАДАЧА № 11.5	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-01 ШНФР (заполняется оргкомитетом)

$t^4+at^3+bt^2=(a+b)(2t-1)$ Д-во: $b_1b_4>b_2b_3$, или

Док-во:

$t^2(t^2+at+b)=(a+b)(2t-1)$ $\frac{b_4}{b_3}>\frac{b_2}{b_1}$, ~~все~~ $b_1>0$

$b_2>0$

$a\neq 1-b$, т.к. тогда не будет 4 решения $b_3>0$

$b_4>0$

~~Если~~

$t^4+at^3+bt^2-2at-2bt+a+b=0$

$t^4+a(t^3-2t+1)+b(t^2-2t+1)=0$

$t^4+a(t^3-2t+1)+b(t-1)^2=0$.

6 баллов [подпись]

ЗАДАЧА №11.6.	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да, может.

Расставим гири в порядке возрастания массы. Тогда первые 30 гирь можно отдать Пете, а последние 30 Васе. Т.к. $30 < \cancel{50}\ \frac{100}{2}$, то гири не пересекаются.

Тогда максимальная масса которую может создать Петя 11 и 12 гирями — это $\frac{30+20}{2} \cdot 11 = 275$, а $\frac{30+19}{2} \cdot 12 = 294$ соответственно.

А минимальную массу, которую может сделать Вася 11 ~~и 12 гирями~~ гирями. это $\frac{70+80}{2} \cdot 11 = 825$. и

Если брать Васе другие гири, то масса будет увеличиться, а если Пете, то будет уменьшиться поэтому. они не смогут уравновесить друг друга.

Поэтому, да, может.

0 баллов Сурмолт

ЗАДАЧА № 11. 7.	ЛИСТ 1 ИЗ 2. (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-02 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

$g_1(x) = px^2 + qx + r$

$g_2(x) = x^2$

в точках A и B $g_1(x) = g_2(x)$

$px^2 + qx + r = x^2$

$(p-1)x^2 + qx + r = 0$

~~Тн Виета $x_1 \cdot x_2 =$~~ Тн Виета $\begin{cases} x_A + x_B = -q \\ x_A \cdot x_B = r \end{cases}$

$D = q^2 - 4(p-1)r \geq 0$, т.к. 2 точки $\Rightarrow$ 2 ответа

Нужно ввести ~~уравнение~~ функцию касательной к функции.

$f(x)$ - касательная

$f(x) = g_2(x)_{A,B} - g_2'(x) \cdot (x - x_{A,B})$

$f(x) = x_{A,B}^2 - 2x \cdot (x - x_{A,B})$ $x_{A,B}$ - означает, что это 2 разные функции касательных.

$f(x) = x_{A,B}^2 - 2x^2 + 2x \cdot x_{A,B} + x_{A,B}^2$

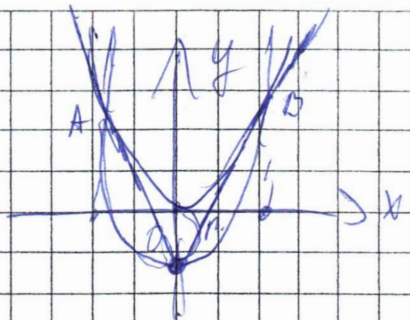
Когда $f_A(x_C) = f_B(x_C)$, то это еще равно $g_1(x_3)$.

$-2x_C^2 + 2x_A x_C + x_A^2 = -2x_C^2 + 2x_B x_C + x_B^2$

$x_A^2 - x_B^2 + 2x_A x_C - 2x_B x_C = 0$. $x_A = x_B$

$(x_A - x_B)(x_A + x_B + 2x_C) = 0$. $2x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ Продолжение

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



В силу выпуклости (функции) $p > 0$, иначе пересечения касательных не будет.

$x_в = \frac{-q}{2p}$, пусть $x_в = 0$, тогда

$-q = 0 \Rightarrow q = 0$, $p \neq 0$, и

Тогда

$y_1(x) = px^2 + r$, где r показывает насколько y_1 ниже y_2.

Если $x_B = 0$, то $x_C = 0$ из $f(x_C) = f(x_C)$

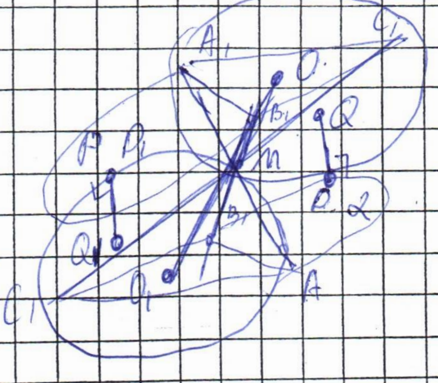
$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$, тогда $x_A = -x_B$.

Тогда для пересечения графика y_2 графиком y_1 $p > 1$.

Когда $x_C \neq 0$, то

6 баллов [подпись]

ЗАДАЧА № 11.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Пусть плоск ABC — α.

плоск $A_1B_1C_1$ — β.

Относительно т. M симметрия $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

Продлим OM в сторону M на длину OM.

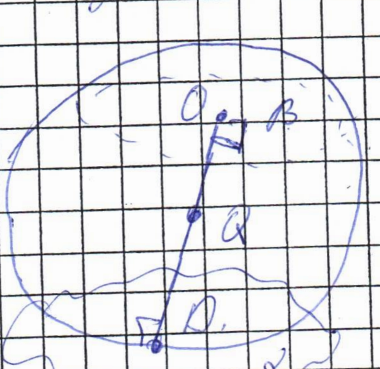
Нарисуем симметричную сферу описанную около $A_1B_1C_1M$.

OP и O_1P_1 $\perp \alpha$ и $\perp \beta$, т. касания.

$OP \parallel O_1P_1$ — т.к. симметрия отн. т. M.

$\alpha \parallel$ плоскости $A_1B_1C_1$ и $\beta \parallel$ пл. ABC, в силу симметрии.

Это значит, что т. O лежит на прямой QD и QD т. O_1 лежит на Q_1P_1.



Прямая соед. центры сферы и окружности сферы $\perp$ плоскости окружности.

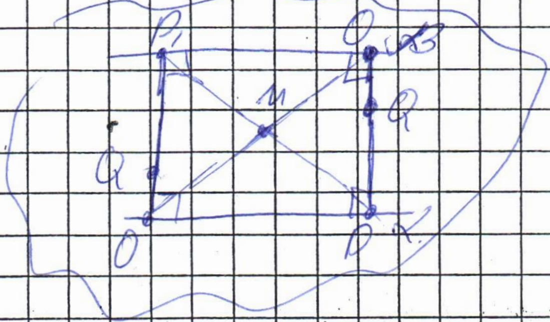
А из-за того что плоскости параллельны, то $OQ \parallel QD$, а значит это одна прямая.

Продолжение $\Rightarrow$

ЗАДАЧА №11.8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Продолжение.

Тогда $OD \parallel O_1D_1$, из-за симметрии
а тогда прямая OO_1 лежит в од. плоскости,
рассмотрим ее, пусть она γ.



фигура OD_1O_1D - прямоуг. с центром M., следовательно $OM = MD$, как половины диагоналей в прямоуг.

Что и требовалось д-ть.

0 баллов (судья 1)

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-05-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Посчитаем, сколько всего точек.

Они увеличиваются по арифм прогресс в ряду.

от 1 до 111, с шагом в 1.

$$S = \frac{1+111}{2} \cdot 112 = 56^2 \cdot 2 = 6272$$

Если посчитать кол-во способов для одной стороны, то нужно умножить на 3, ввиду симметрии.