| ЗАДАЧА №10.1 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 | М-10-5 |
|---|---|---|
| | (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | ШИФР (заполняется оргкомитетом) |

$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ Т. Виета $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

$f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = 0$

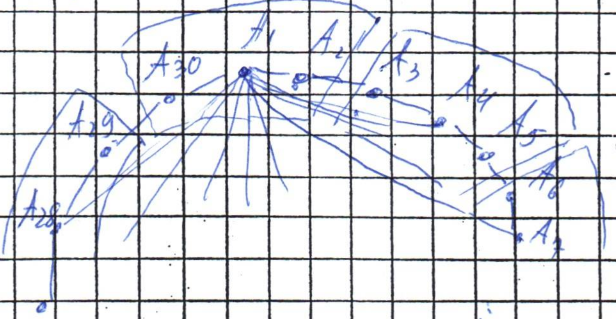
$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c = ax_1^2 + bx_1 + c + ax_2^2 +$

$+ bx_2 + c + 2ax_1x_2 - c = 2ax_1x_2 - c = 2c - c = c = 2025$

| ЗАДАЧА № 10.2 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Рассмотрим 30 городов в виде графа: города - точки, авиалинии - ~~точки~~ рёбра. Т. к. города соединены в цикл => граф будет циклический

Объединим города в группы по 3 соседних, как показано => 10 групп. Соединим центральные города каждой группы с городом $A_1$ => 9 авиалиний, ещё одну авиалинию проведём в любом месте.




Докажем, что теперь можно из любого города добраться до любого другого не более, чем за 4 перелёта.

Рассмотрим случайный город => Не более чем за 1 перелёт можно добраться до центрального города в этой группе. Далее не более чем за 1 перелёт можно добраться до города $A_1$. Далее не более чем за 1 перелёт можно добраться до центрального города группы в которой находится нужный нам город. Далее не более чем за 1 перелёт можно добраться до нужного города => не более 4 перелётов

Ответ: да

| ЗАДАЧА № 10.3 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Пусть $b = a + x_b$ ; $c = a + x_c$

$2 = a^2 b + b^2 c + c^2 a = 3a^3 + a^2(3x_b + 3x_c) + a(2x_b x_c + x_b^2 + x_c^2) + x_c x_b^2$.

$4 = ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3a^3 + a^2(3x_b + 3x_c) + a(2x_b x_c + x_b^2 + x_c^2) + x_c^2 x_b \Rightarrow$

$4 - 2 = 2 = x_b x_c^2 - x_c x_b^2 = x_b x_c(x_c - x_b)$

Пусть: $\begin{cases} x_c - x_b \geq -2 \\ x_c - x_b \leq 2 \end{cases}$ $2 = x_b x_c(x_c - x_b) \leq 2x_b x_c$

$x_c \leq 2 + x_b \Rightarrow 2 \leq 2x_b x_c \leq 2x_b^2 + 4x_b \Rightarrow$

$x_b^2 + 2x_b + 1 = (x_b + 1)^2 \geq 2$ ; $x_b \leq -\sqrt{2} - 1$, т.к.

$|-\sqrt{2} - 1| > 2 \Rightarrow a - b > 2 \Rightarrow x_b \geq \sqrt{2} - 1$

$2 = x_b x_c(x_c - x_b) \geq -2x_b x_c \Rightarrow x_b x_c \geq -1$

~~$x_b^2 x_c \leq 2$ ... $-1 \leq x_b x_c \leq x_b^2 + 2x_b \Rightarrow$~~

$x_b \leq x_c + 2 \Rightarrow x_c^2 + 2x_c + 1 \geq 2 \Rightarrow x_c \geq \sqrt{2} - 1$

~~$2 \leq 2x_b x_c$ ... $2 \leq x_b x_c$~~ $a$ - наименьшее

Пусть никакие 2 числа не отличаются более, чем на 2:

Пусть теперь: $a = b + y_a$ ; $c = b + y_c \Rightarrow 2 = 3b^3 + b^2(3y_c + 3y_a) + b(y_c^2 + 2y_c y_a + y_a^2) + y_c^2 y_a$

$4 = 3b^3 + b^2(3y_c + 3y_a) + b(y_c^2 + 2y_c y_a + y_a^2) + y_a^2 y_c \Rightarrow$

| ЗАДАЧА № 10.3 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

$4-2=2=y_a^2y_c-y_c^2y_a=y_cy_a(y_a-y_c)$

$\begin{cases} y_a-y_c\geq -2 \\ y_a-y_c\leq 2 \end{cases}$ $\quad 2=y_cy_a(y_a-y_c)\leq 2y_cy_a$

$1\leq y_cy_a$

$y_a\leq 2+y_c \Rightarrow 1\leq y_c^2+2y_c \Rightarrow (y_c+1)^2\geq 2$

$y_c\nleq -1-\sqrt{2}$, т.к. $|-\sqrt{2}-1|>2 \Rightarrow в-c>2$

$y_c\geq\sqrt{2}-1$

$y_c\leq 2+y_a \Rightarrow 1\leq y_a^2+2y_a \Rightarrow (y_a+1)^2\geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y_a\nleq -1-\sqrt{2}$, т.к. $|-\sqrt{2}-1|>2 \Rightarrow$

$в-a>2 \Rightarrow y_a\geq\sqrt{2}-1 \Rightarrow в$ - наименьшее $\Rightarrow$

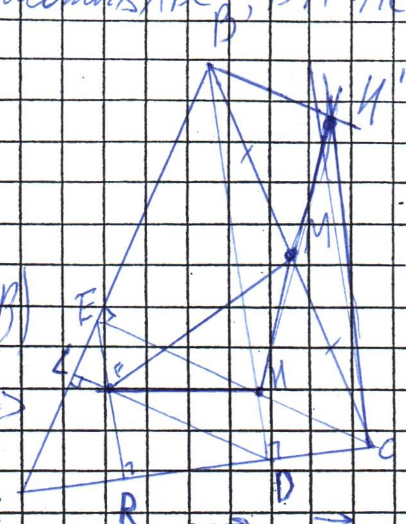
Противоречие $\Rightarrow$ Найдутся числа, отличные более чем на 2

| ЗАДАЧА № 10.5 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Дано: $\triangle ABC$; $BD \cap EC = H$; $BD$ и $EC$ – высоты $\triangle ABC$; $BM = MC$

$F$ – ~~точка~~ ортоцентр $\triangle ADE$

Доказать $BH + CH \geq 2FM$




$F$ – ортоцентр $\Rightarrow DL \cap ER = F$;

$DL \perp AB$; $ER \perp AC$; $(DL$ и $EC \perp AB)$

$DL \parallel EC$; $(ER$ и $BD \perp AC)$ $ER \parallel BD \Rightarrow$

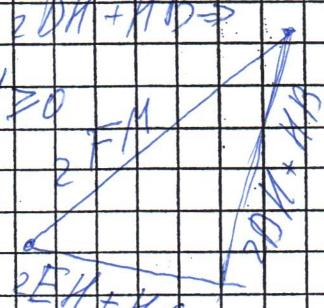
$\Rightarrow FDHE$ – параллелограм; Достроим $\triangle BHC$ до параллелограмма $\Rightarrow HH' = 2HM$; $2\vec{HM} = \vec{HB} + \vec{HC}$; $\vec{FM} = \vec{FH} + \vec{HM} = \vec{EH} + \vec{DH} + \frac{\vec{HB}}{2} + \frac{\vec{HC}}{2}$ $| \cdot 2$

$2\vec{FM} = \cancel{2\vec{FH} + 2\vec{HM}}\ 2\vec{EH} + 2\vec{DH} + \vec{HB} + \vec{HC}$; $\vec{EH} \uparrow\uparrow \vec{HC}$; $\vec{DH} \uparrow\uparrow \vec{HB} \Rightarrow$ ~~Дост~~ Построим $\triangle$ из этих векторов:

$\Rightarrow 2FM \leq 2EH + HC + 2DH + HB \Rightarrow$

$2FM \leq BH + HC$; $HD$ и $EH \geq 0$

, т.к. ~~лежат~~ $F$ и $H$ лежат по разные стороны от $ED$.



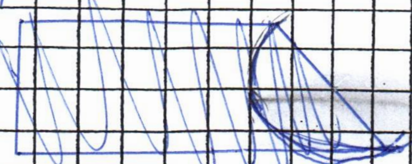
| ЗАДАЧА № 10. 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Докажем, что нельзя изменить число в положительную или отрицательную сторону 2 раза бо подряд.

Числа на табло $\in [0;99]$, а за 2 хода нажатия в одну сторону мы изменим число бол на более или равно: $50+50=100$; $100>99$ $\Rightarrow$ т.к. первым нажатием число увеличивается $\Rightarrow$ оно увеличивается 3) нажатием, 5) нажатием, 7) нажатием ... 2025) нажатием, а т.к. число до увеличения $\geq 0$ $\Rightarrow$ после оно $\geq 50$ $\Rightarrow$ $\neq 25$

| ЗАДАЧА № 10.7 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | ш-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Дано: ABCD-тр. $\angle A=\angle B=90°$; CE и DE-бисс.



Доказать: окр$_{ABE}$ кас окр$_{CED}$

Проведём $H_1H_2$ — высоту трапеции через т. E; докажем, что окружности касаются её

$\angle CDE+\angle ECD+\angle CED=180°=\angle CED+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle D$;

$BC \parallel AD \Rightarrow \angle C+\angle D=180° \Rightarrow \angle CED+90°=180° \Rightarrow \angle CED=90°$

$\Rightarrow \frac{\angle C}{2}+\frac{\angle D}{2}=90°$, $\triangle EH_2D$; $\angle EH_2D=90° \Rightarrow \angle H_1ED=\frac{\angle C}{2} \Rightarrow$

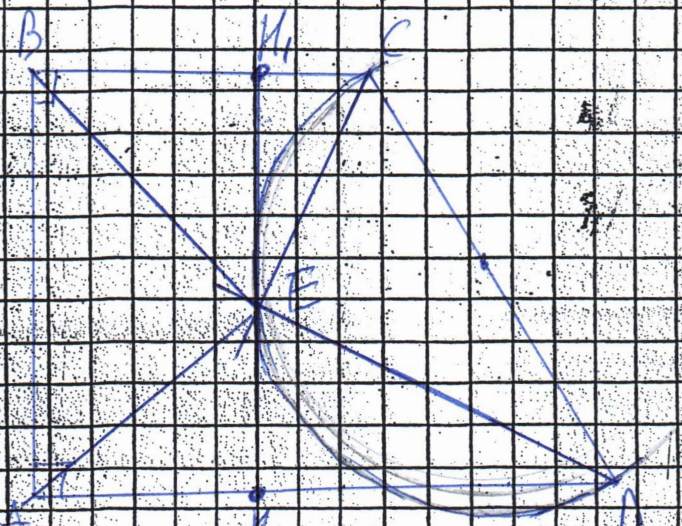
$H_1H_2$ - кас к окр$_{CED}$

~~$\angle AEH_2=90°-\angle BAH_1$~~

~~$(\angle EH_1A=90°)$~~

CE - бисс ⇒ E равноудалена от BC и CD

DE - бисс ⇒ E равноудалена от AD и CD ⇒



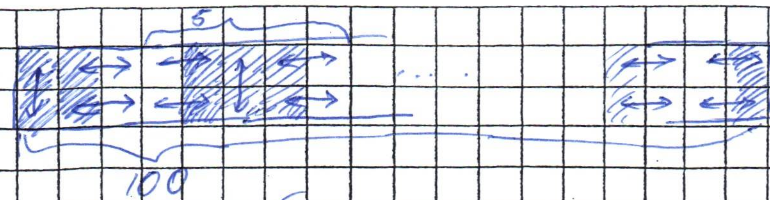

$EH_2=EH_1$; $BH_1=AH_2 \Rightarrow \triangle BH_1E=\triangle AH_2E$ (по 2-м катетам)

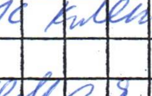
$\Rightarrow AE=BE$; $\triangle ABE$ - р/б; $\angle BAE=\angle ABE=90-EBH_1=$

$=BEH_1 \Rightarrow H_1H_2$ - кас к окр$_{ABE}$

| ЗАДАЧА №10.8 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Пример:



Начнём раскраски доску, начиная с чёрного квадрата, белого прямоугольника, а далее повторяя комбинацию $5 \times 2$ ⇒ всего чёрных клеток 120. Условие уникальности доминошек выполняется, т.к. доминошка около белых клеток имеют единое расположение, а оставшиеся нельзя разместить иным образом. Заметим, что доминошки не могут располагаться в такой форме , т.к. иначе ~~начало~~ нельзя уложить в форму $2 \times 100$. Рассмотрим квадрат $2 \times 2$, а не $2 \times 100$ ⇒ в нём не более 2-ух чёрных клеток, для 1 квадратика для уникального расположения домино. Разобьём данный прямоугольник на максимальное число квадратов, как чтобы квадраты не обрезали домино ⇒ произвольная последовательность из квадратов и прямоуг ~~домино~~; Заметим, что

2 прямоуг. не могут стоять рядом. Рассмотрим ~~всевозможные перестанов~~ всевозможные перестановки квадратов и прямоуг. И докажем что как содержит,

| ЗАДАЧА № 10.8 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

больше всего чёрных ~~клеток~~: Комбинация из
послед. квадратов содержит не более 100г;
Из ~~квадрата~~ прямоуг, квадрата, прямоуг;

За 8×2 мы можем получить не более чем 6 и
7г., что-бы сохранялся период => не более чем
100г и 117г (с округлением вверх) => Ответ 120

| ЗАДАЧА №10. 9 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

$d$ - разность, заметим, что если $d \vdots 2$ и $d \vdots 5 \Rightarrow$ одно из чисел последов. $\vdots 10 \Rightarrow \emptyset$

Заметим, что если одно из чисел $\vdots 2$, то оно степень двойки; и через некоторое время будет ещё как минимум 2 числа кратные 2-ум: $2^n + kd = 2^m$

$2^m + x = 2^z \Rightarrow 2^m - 2^n = x = 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^z - 2^m =$

$= 2^z \cdot (2^{z-m} - 1) \Rightarrow 2^z \neq 2^n \Rightarrow x = \emptyset \Rightarrow \vdots 2$

$d \vdots 2$

Докажем, что в арифм. прогресси из $N$ чисел с $d \not\vdots p$, $p$ - простое, среди $p$ последовательных найдётся число $\vdots p$

Для этого рассмотрим среди $p$ последовательных чисел послед. 2 числа дающие 1 ост. при делении на $p$

$a + kd \overset{p}{\equiv} a \Rightarrow kd \equiv 0 \Rightarrow k \vdots p \Rightarrow k \in N$ $k \geq p \Rightarrow$ среди $p$ послед. чисел есть $p$ уникальных остатков при делении на $p \Rightarrow$ есть и 0. Заметим, что $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 > 2025 \Rightarrow$ найдётся $p \leq 13 \Rightarrow$ среди 150 найдутся как минимум 3 $\vdots p \Rightarrow$ вида $p\alpha$; $p\beta$; $p\gamma$

$p\alpha + pd = p\beta = p(\alpha + d) \Rightarrow \alpha + d \overset{10}{\equiv} \alpha \Rightarrow d \vdots 10 \Rightarrow$

Все числа заканчиваются на одну цифру

| ЗАДАЧА №10.9 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

~~$2\cdot5\cdot3\cdot7\cdot11\cdot13>2025$~~

~~$2\cdot5\cdot3\cdot13\cdot23\cdot43>2025$~~

~~$2\cdot5\cdot7\cdot17\cdot27\cdot37>2025$~~

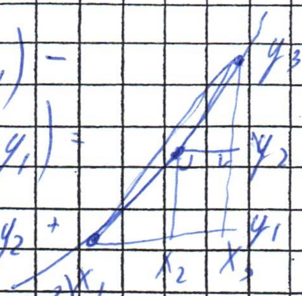
~~$2\cdot5\cdot11\cdot$~~

Пусть числов последовательности заканчивается на x, цифру x ⇒ Возьмём ~~первы~~ несколько первых чисел простых чисел не заканчивающихся на x, например $2\cdot5\cdot3\cdot13\cdot23\cdot43>2025$ числа на $2\cdot5\cdot7\cdot17\cdot27\cdot37>2025$, если $x=3$ берём 7, а если $\neq 3$ берём 3 ⇒ среди этих 150 чисел мы найдём число: одному из простых ~~таких~~ чисел (3; 13; 23; 43; 7; 17; 27; 37), такое что условие не соблюдается.

(Рассматриваем последовательность от n d a p, такое что d ⋮ одному из p, а p = {3; 13; 23; 43; 7; 17; 27; 37})

| ЗАДАЧА № 10.10 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-5 ШИФР (заполняется оргкомитетом) |
|---|---|---|

Рассмотрим 3 точки на параболе $\Rightarrow$




$2S = (x_3-x_1)(y_3-y_1) - (x_2-x_1)(y_2-y_1) -$

$-(x_3-x_2)(y_3-y_2) - 2(x_3-x_2)(y_2-y_1) =$

$= x_3(y_2-y_1 - 2y_2 + 2y_1) + x_2(y_1+y_3-2y_2+$

$+2y_2-2y_1) + x_1(y_2-y_3) = x_3(x_1^2-x_2^2)+$

$+x_2(x_3^2-x_1^2) + x_1(x_2^2-x_3^2) = x_3x_1^2 + x_2x_3^2 + x_1x_2^2 -$

$- x_3x_2^2 - x_2x_1^2 - x_1x_3^2$

Рассмотрим $(x_2+x_3+x_1)(x_1^2-x_3^2+x_2^2) = \cancel{x_2x_1^2} +$

$\cancel{+x_1x_2^2 + x_3x_1^2 + x_1x_2^2 - x_3x_2^2 - x_2x_3^2 - x_1x_3^2 - x_3x_3^2}$

$(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + x_1x_2^2 + x_2x_1^2 - x_1x_3^2 - x_2x_3^2 - x_3x_2^2 - x_3x_1^2$

$= -2S + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2^2 - 2x_3x_2^2$

Найдём такие числа, что $(x_2-x_3+x_1)(x_1^2-x_3^2+x_2^2)=0$

и $x_1^3+x_2^3+x_3^3+2x_1x_2^2-2x_3x_2^2 = x_4^3+x_5^3+x_6^3+2x_4x_5^2-$

$-2x_6x_4^2$, Пусть $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ и $x_4+x_5=x_6$

$x_4^3-2x_6x_4^2 = x_4(x_4^2-2x_6x_4+x_6^2-x_6^2) = x_4x_5^2 - x_4x_6^2$

$x_5^3+2x_4x_5^2 = x_5x_6^2 - x_5x_4^2 \Rightarrow x_4^3+x_5^3+x_6^3+2x_4x_5^2-2x_6x_4^2=$

$= x_4x_5^2 - x_4x_6^2 + x_5x_6^2 - x_5x_4^2 + x_6^3 = x_6^3 + x_6^2(x_5-x_4) +$

$+ x_4x_5(x_5-x_4)$