ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Чтобы площадь квадрата была $>1 \Rightarrow$ сторона квадрата должна также быть больше 1.

Пусть Олег взял несколько прямоугольников - все их площади различны по условию.

Пусть площадь наибольшего прямоугольника из взятых равна $= 1 \cdot n$, где n - его вторая сторона, $n \in [2; 2024]$, n-целое.

Чтобы получился квадрат, его площадь должна быть $n \times n$ (n - сторона наиб. прямоуг.). Тогда площадь остальных прямоугольников, меньших по размеру должна быть равна:

$n \cdot n - n \cdot 1 = n^2 - n$ (Из площади всего квадрата вычли площадь одного большого прямоугольника)

Пусть Олег взял все оставшиеся прямоугольники. Т.к. прямоугольник $n \times 1$ - наибольший из взятых, то всего остальных меньших по размеру будет $n-1$ (например, пусть наибольший 10×1, тогда останутся 9 меньших прямоуг.). Сторона следующего прямоуг. максимальная будет равна $n-1$, тогда его площадь равна $= 1 \cdot (n-1) = n-1$

Если умножить максимальную площадь на максимальное кол-во прямоугольников, получим:

$(n-1) \cdot (n-1) = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$

$n^2 - 2n + 1 \vee n^2 - n$ - сравним полученное значение с площадью которую нужно прибавить к наибольшему прямоугольнику.

Т.к. n - положительное $\Rightarrow$ $n^2 - 2n + 1 \vee n^2 - n$

$-2n + 1 \vee -n$

$-n$ будет больше $-2n+1$ во всех случаях, кроме $n=1$ $\Rightarrow$ $n=1$ не подходит из условия

ЗАДАЧА № 11 . 1	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11 - 09 - 01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

⇒ Даже при максимальных, невозможных значениях площади её не хватает, чтобы получился квадрат.

Ответ: нет, не может.

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим последовательности, в которых числа увеличиваются на 1, а $x_1 = 1$.

Тогда получится: $1 < 2 < 3 \dots < 2024$

Для примера посчитаем p_6 и p_7:

$p_6 = \left(1-\frac{1}{1}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(5-\frac{1}{5}\right)\left(6-\frac{1}{6}\right) = 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{24}{5}\cdot\frac{35}{6} =$

$= \cancel{4}\cdot 3\cdot 4\cdot 35$ — целое число

$p_7 = \cancel{4}\cdot 3\cdot 4\cdot 35\cdot\left(7-\frac{1}{7}\right) = 3\cdot 4\cdot 35\cdot\frac{48}{7} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 48$

$(p_7 = p_6\cdot\left(x_7 - \frac{1}{x_7}\right)$

Увидим, что дроби сокращаются, а знаменатель следующего числа сокращается с предыдущим p. Везде получаются натуральные числа, кроме $x_2 = 2$, т.к. $p_2 = 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

При такой последовательности может получится $2024 - 1 = 2023$ натуральных числа.

Ответ: 2023.

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Если белых точек 100 – чётное кол-во, а Зоя начинает ⇒ заканчивать закрашивать точки будет Боря.

И Боря, и Зоя закрасят по 50 точек.

Рассмотрим цепочку длиной в 10 шариков, тогда всего есть 10 таких цепочек.

Последовательность и кол-во ходов в таких цепочках одинакова, т.к. в ней чётное кол-во точек.

Первая закрашивает Зоя, пусть синим цветом.

3.1

○ ○ ⓒ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Т.к. Боре нужно, чтобы было как можно больше ~~шариков~~ точек с одинаковыми цветами рядом, он может через 2 точки закрасить другую зелёным цветом. Тогда Зоя ~~может~~ закрасит точку рядом синим цветом и получит 1 пару точек разных цветов:

ⓒ ③

○ ○ ⓒ ⓒ ~~ⓒ~~ ③ ○ ○ ○ ○

3.1 3.2 Б.1

Но Боря закрасит оставшуюся точку между ними синим и получит 2 пары с одинаковыми цветами.

Левее самой первой закр. точки Зоя может закрасить её зелёным цветом и получит ещё одну пару, тогда Боре нужно будет закрасить самую левую точку таким же цветом.

Б.3 3.3

③ ③ ⓒ ⓒ ⓒ ③ ○ ○ ○ ○

3.1 Б.2 3.2 Б.1

Оставшиеся 4 точки они могут закрасить так же, как и первые 4.

3.4 Б.4

Получится: ③ ③ ⓒ ⓒ ⓒ ③ ⓒ ⓒ ⓒ ③ 4 пары различных цветов.

Б.5 3.5

Зое нужно будет в каждых 10 точках начинать не с первой, тогда она гарантированно получит $4 \cdot 10 = 40$ пар.

Ответ: 40.

ЗАДАЧА № 11 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть 1-я гиря - гиря массой 1 г, 2-я гиря - массой 2 г и т.д.

Пусть учитель даст Пете гири с 1-й по 30-ю, т.е. с минимальными массами, а Васе - с 71-й по 100-ю, т.е. с максимальными массами.

Тогда, если 11 гирь из 30 Петиных смогут уравновесить 12 гирь из 30 Васиных или 12 из 30 Петиных гирь смогут уравновесить 11 Васиных гирь, учитель не может раздать им так гири.

Чтобы гири можно было уравновесить, посмотрим, смогут ли Петины гири с максимальной массой превысить массу Васиных гирь с минимальной массой.

I случай: 11 Петиных гирь $\neq$ 12 Васиных гирь.

11 Петиных гирь с максимальной массой - это гири с 20-й по 30-ю.

12 Васиных гирь с минимальной массой - с 71-й по 82-ю.

Кол-во Васиных гирь больше, а также масса каждой гири больше массы каждой гири Пети в несколько раз $\Rightarrow$ их уравновесить не получится, так как даже сумма максимальных масс гирь Пети намного меньше ~~мин~~ суммы минимальных масс гирь Васи.

II случай: 11 Васиных гирь $\neq$ 12 Петиных гирь.

Возьмём также гири Васи с минимальной массой, а гири Пети - с максимальной.

Массу всех гирь можно найти как сумму арифм. прогр.:

$S_1 = \frac{71+81}{2} \cdot 11 = 836$ - общая масса 11 ~~гир~~ Васиных гирь с мин. массой (с 71-й по 81-ю)

$S_2 = \frac{19+30}{2} \cdot \cancel{12}^{6} = 294$ - общая масса 12 Петиных гирь с макс. массой (с 19-й по 30-ю)

Здесь также видно, что мин. масса Васиных гирь в несколько раз больше макс. массы Петиных гирь $\Rightarrow$ их нельзя уравновесить $\Rightarrow$ учитель сможет раздать гири таким образом. Ответ: да, сможет.

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

1) Если графики G_1 и G_2 пересекаются в двух точках $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение $px^2+qx+r=x^2$ должно иметь 2 корня $\Rightarrow D>0$.

$px^2+qx+r-x^2=0$

$x^2(p-1)+qx+r=0$

$D=q^2-4\cdot r\cdot(p-1)>0$

2) По т. Виета: $x_1+x_2=\frac{-q}{p-1}$

$x_1\cdot x_2=\frac{r}{p-1}$

Пусть $x_1=a$ (значение x в т. A); $x_2=b$ (знач. x в т. B); $a\neq b$

3) У графика G_2 есть 2 касательные в т. A и в т. B;

ур. касательной $= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

Тогда ур. кас. в т. A $\Rightarrow y=f(a)+f'(a)(x-a)$ В т. B:

$y=f(b)+f'(b)(x-b)$

$f(x)=G_2=x^2$

$f'(x)=G_2'=2x$, тогда:

ур. кас. в т. A $\Rightarrow$ $y=a^2+2a(x-a)$ В т. B:

$y=b^2+2b(x-b)$

4) Т.к. касательные пересекаются в т. C

$a^2+2a(x-a)=b^2+2b(x-b)$

$a^2+2ax-2a^2=b^2+2bx-2b^2$

$-a^2+2ax=-b^2+2bx$

$b^2-a^2+2ax-2bx=0$

$(b-a)(b+a)+2x(a-b)=0$

$(b-a)(b+a)-2x(b-a)=0$

$(b-a)(b+a-2x)=0$

$b-a$ не может быть $=0$, т.к. $b\neq a$, тогда $b+a-2x=0$

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$2x = b + a$

$x = \frac{a+b}{2}$ — координата x т. C.

$C \in$ касательной в т. B $\Rightarrow y = b^2 + 2b\left(\frac{a+b}{2} - b\right)$

$y = b^2 + b(a+b) - 2b^2$

$y = b^2 + ab + b^2 - 2b^2$

$y = ab \Rightarrow C\left(\frac{a+b}{2}; ab\right)$

5) т.к. $C \in G_1 \Rightarrow ab = p\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + q\left(\frac{a+b}{2}\right) + r$

$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(p \cdot \frac{a+b}{2} + q\right) + r$

Из д. 2: $\frac{a+b}{\cancel{a_1 + a_2}} = \frac{-q}{p-1}$

$a \cdot b = \frac{r}{p-1}$

$\frac{r}{p-1} = \left(\frac{-q}{p-1} : 2\right)\left(p \cdot \frac{-q}{2(p-1)} + q\right) + r$

$\frac{r}{p-1} = \frac{-q}{2(p-1)} \cdot \left(\frac{-qp}{2(p-1)} + q^{(2(p-1)}\right) + r \quad | \cdot 2$

$\frac{2r}{p-1} = \frac{-q}{p-1} \cdot \left(\frac{-qp + 2q(p-1)}{2(p-1)}\right) + 2r$

$\frac{2r}{p-1} = \frac{-q}{p-1}\left(\frac{-qp + 2qp - 2q}{2(p-1)}\right) + 2r$

$\frac{2r}{p-1} = \frac{-q}{p-1} \cdot \frac{qp - 2q}{2(p-1)} + 2r$

$\frac{2r}{p-1} = \frac{-q^2(p-2)}{2(p-1)^2} + 2r \quad | \cdot 2(p-1)^2$

$2r \cdot 2(p-1) = -q^2(p-2) + 2r \cdot 2(p-1)^2$

$4r(p-1) = -q^2(p-2) + 4r(p-1)^2$

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-09-02 ШНФР (заполняется оргкомитетом)

$4r(p-1)-4r(p-1)^2+q^2(p-2)=0$

$4r(p-1-(p-1)^2)+q^2(p-2)=0$

$4r(-p^2+3p-2)+q^2(p-2)=0$

$-4r(p^2-3p+2)+q^2(p-2)=0$

$-4r(p-2)(p-1)+q^2(p-2)=0$

$(p-2)(q^2-4rp+4r)=0$

$p-2=0$

$p=2$ – не может быть, т.к. p – вещ. число по условию.

$q^2-4rp+4r=0$

$q^2=4rp-4r$

б) $D>0 \Rightarrow \quad 4rp-4r-4rp+4r>0$

$0>0 \Rightarrow p$ – не сущ.

Ответ: $p\in\varnothing$