

ЗАДАЧА № 1. _	ЛИСТ 1 ИЗ 1	Ш-8-13 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	

Числа могли быть равны, например таким значениям:

$$a = 1,2; \quad b = 1,8; \quad c = 2,4.$$

$$\text{Тогда } \frac{a+b}{a-b} = \frac{1,2+1,8}{1,2-1,8} = \frac{3}{-0,6} = -5; \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{1,8+2,4}{1,8-2,4} = \frac{4,2}{-0,6} = -7$$

$$c-a = 2,4-1,2 = 1,2; \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{2,4+1,2}{2,4-1,2} = \frac{3,6}{1,2} = 3.$$

-5 , -7 и 3 — целые числа, при том, что

$1,2$, $1,8$ и $2,4$ — нецелые положительные, а значит
все условия выполняются.

ЗАДАЧА № 2. _	ЛИСТ 1 из 1	М-8-13
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Предположим противное, т.е. лжецов в пещере меньше чем рыцарей. Тогда, рыцарей всего хотя бы 51 (т.к. иначе лжецов хотя бы 50 и их не может быть меньше рыцарей), а значит кланов, в которых есть рыцари - хотя бы 6 (т.к. иначе рыцарей максимум 10 $\cdot$ 5 = 50) а так как в сумме это кланы оклеветали (т.е. соврали ни их счёт, что в них нет рыцарей - ~~хотя бы~~ ^{по крайней мере} $6 \cdot 10 \geq 60$ ~~лжецов~~), а значит лжецов хотя бы 60. Однако, рыцарей тогда максимум 40 $<$ 51 $\Rightarrow$ Противоречие, а значит лжецов в пещере не меньше, чем рыцарей, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА № 3.

ЛИСТ 1 ИЗ 1
(листы по каждой задаче
нумеруются отдельно)

М-8-13
ШИФР (заполняется
оргкомитетом)

Предположим что средн число x, y, z хотя бы
 $z \geq \frac{1}{2}$ (не учитывая общности пусть это x и y). Тогда
 $z > x^2 + y^2 \Rightarrow z > (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow z > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow z > \frac{1}{2}$ ~~таким~~
 Также, можно заметить, что если число $a \geq \frac{1}{2}$, то
 $a \leq 2a^2$ ~~(т.е.)~~ Тогда, сложим неравенства $x > y^2 + z^2$
 $y > z^2 + x^2$ и $z > x^2 + y^2$. Получим: $x + y + z > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$
 Но так как и $x \geq \frac{1}{2}$ и $y \geq \frac{1}{2}$ и $z \geq \frac{1}{2}$, то
 $x \leq 2x^2$ $y \leq 2y^2$ и $z \leq 2z^2$ Тогда: $x + y + z \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$
 Противоречие. Значит, 2 числа одновременно больше $\frac{1}{2}$
 не могут.

ЗАДАЧА № 4. _____	ЛИСТ 1 ИЗ 2	М-8-13
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Приведем стратегию за ход, при которой
 она может получить не менее ~~333~~ 333 руб
 гарантированно. Разобьем доску на ~~также~~ 4
 квадрата 2х2, однако между ними будем оставлять
 по 1 доминошке (т.е. так ).
 Тогда, всего у нас будет 67 квадратов и 66
 доминошек. Пусть сейчас наш ход, и на
 доске осталось 2 монеты. Если есть квадрат,
 в котором хотя бы 2 монеты, поступим по
 следующей стратегии. Если эти 2 монеты соседние
 по стороне, перемещаем 1 из них на другую и
 забираем себе 1 монету. Они расположены
 по диагонали (пусть не уналая обмануть
 таким образом ). Перемещаем монетку так
. Теперь, куда бы Даша не передвинула
 какую-либо монету, мы можем продвинуть 1
 из них на другую, и забрать себе. ~~Итак, пусть~~
 Таким образом, с любого квадрата, в котором
 хотя бы 2 монеты, 1 из них мы заберем.
 Пусть ни в 1 из квадратов нет 2 монет

ЗАДАЧА № 4. —	ЛИСТ 2 ИЗ 2	М-8-13
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

~~Иметь~~ Тогда, возможно 2 случая: в домиканках
 нет монет и в домиканках есть монеты. В
 1-ом случае, передвигаем из домиканки
 в квадрат а дальше разбираем, какие остаются
 рубль 6 и монеты и всё.

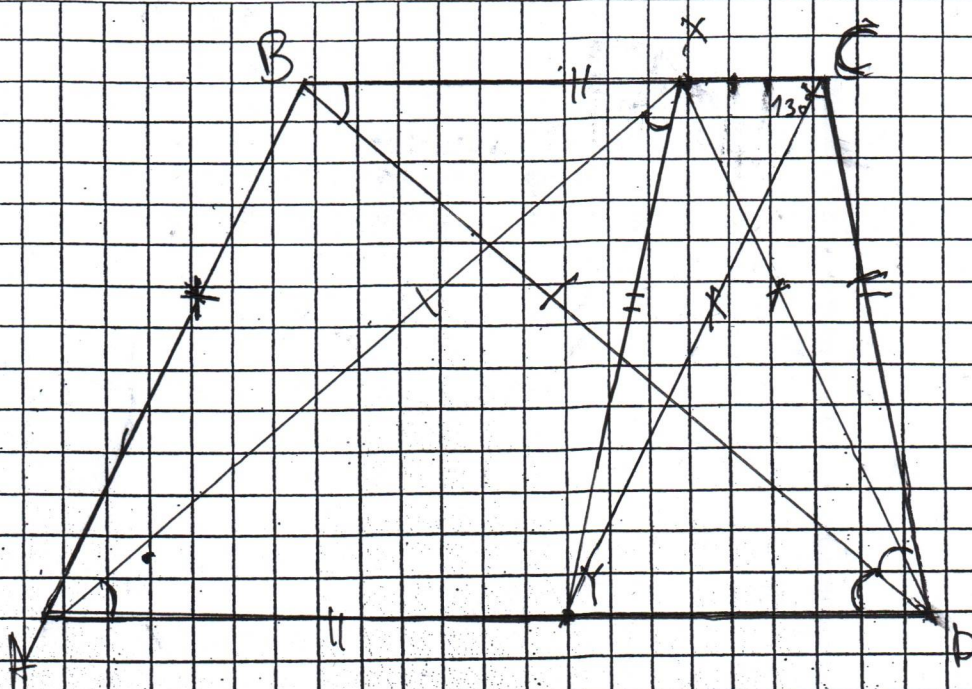
Предположим, что ~~не все~~ все бои с номерами : 17 и номерами : 20 могли оказаться в списке одновременно. В таком случае, рассмотрим бой с номером 119. $119 : 17 \Rightarrow$ этот бой должен был оказаться в списке, а значит он должен был победить во всех своих поединках $\Rightarrow$ он победил 118-ого и 120-ого бойца. Значит, 120-ый боец проиграл 119-му и не мог попасть в этот список. Однако, $122 : 20 \Rightarrow$ и значит не все бои, с номерами : 20 окажутся в списке. Противоречие. Значит, в этом списке не могли оказаться и все бои, с номерами : 17, и все бои, с номерами : 20.

Ответ: нет.

ЗАДАЧА № 7

ЛИСТ 7 ИЗ 2
(листы по каждой задаче
нумеруются отдельно)

М - 8 - 13
ШИФР (заполняется
оргкомитетом)



Дано: $\square ABCD$, BD - биссектр. $\angle ADC$, $AX = BD$, $AY = CD$,
 $\angle BCD = 130^\circ$

Найти: $\angle AXY$

Решение:

Обозначим $\angle CPB$ за α . Тогда, $\angle CBD = \angle BDA = \alpha$
(как иждет лежащих). Тогда, в $\triangle BCD$ $\angle CBD + \angle CDB +$
 $\angle BCD = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$. Также,
так как $\angle CBD = \angle CDB$, $\triangle BCD$ - равнобедренный и $BC = CD$.
Тогда, $AY = CD = BC \Rightarrow ABCY$ - параллелограмм, т.к.
2 стороны BC и AY в нём равны и параллельны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow BA \parallel CY$.

Рассмотрим трапецию $ABXD$: $AX = BD \Rightarrow$

ЗАДАЧА № 7

ЛИСТ 2 ИЗ 2
(листы по каждой задаче
нумеруются отдельно)

М-8-13
ШИФР (заполняется
оргкомитетом)

$\Rightarrow$ диагонали в этой трапеции равны $\Rightarrow$ эта трапеция
равнобедренная $\Rightarrow XD = AB = CY$

Теперь рассмотрим трапецию $YXCD$

$YC = XD \Rightarrow$ диагонали в этой трапеции равны $\Rightarrow$
эта трапеция равнобедренная $\Rightarrow YX = CD = AY = BC$

Рассмотрим $\triangle XYA$ и $\triangle BCD$:

1. $XY = BC$
 2. $AY = CD$
 3. $BA = XA$
- $\left. \begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array} \right\} \triangle XYA = \triangle BCD$ по 3-м сторонам

В равных треугольниках напротив равных сторон
лежат равные углы $\Rightarrow \angle AXY = \angle CDB = \alpha = 25^\circ$

$\Rightarrow$ Значит, $\angle AXY = 25^\circ$

Ответ: 25°

ЗАДАЧА № 8.	ЛИСТ 1 ИЗ 4	Ш-8-13 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	

Обозначим за a величину, равную (количество раз, которое мы ~~пробавляли~~ ^{вычитали} 34) - количество раз, которое мы ~~вычитали~~ ^{пробавляли} 34. Нужно заметить, что так как $33 : 11 = 3$ и $33 : 3 = 11$, то прибавляя или вычитая 33 к/из числа на экране, мы никак не изменим его остаток при делении на 11 и на 3.

Значит, так как мы можем изменить остаток числа при делении на 11 только вычитанием / прибавлением 34, а равное количество вычитаний и прибавлений одно и то же число даст в итоге 0 (т.е. если мы прибавим 34 к числу k раз и k раз его вычтем, число не изменится, а значит в конечном итоге важно только разность количества вычитаний и прибавлений).

То $a = 2$ (т.к. $41 = 11 \cdot 3 + 8$ а $50 = 11 \cdot 4 + 6$, а $8 - 6 = 2$).
^{прибавление}
 вычитание 34 изменяет остаток при делении на 11 на -1 и на 10 вычитаний остаток никак не изменит).

А так как и $41 = 3 \cdot 13 + 2$ и $50 = 3 \cdot 16 + 2$, то $a : 3$ (чтобы не изменить остаток при делении на 3).

Также, можно заметить, что за 2025 операций и 11-ость числа на экране изменилась, и

ЗАДАЧА № 8. _____

ЛИСТ 2 ИЗ 4
(листы по каждой задаче
нумеруются отдельно)

М-8-13
ШИФР (заполняется
оргкомитетом)

вычитание / прибавление 34 и четное число вычитаний,
прибавлений 33 четность не меняется, то операций
вычитания / прибавления 33 было нечетное число,
а значит $a : 2$ (12025 - неч.) : 2 и всего
операций с 34 было $(2 \cdot (\text{операции прибавления} + 9)) : 2$,
а значит $a : 2$. Теперь, рассмотрим ^{работ} 2 случая:
I операции прибавления 34 было больше, чем вычитания.
Тогда $a \leq 0$. Так как мы знаем, что $a - 2 : 11$,
 $a : 2$ и $a : 3$. То перебором вариантов, ~~мы~~ мы
можем получить, что мин. возможное a (по модулю)
-42. В таком случае, операций прибавления 34
было сделано хотя бы на 42 больше, чем
вычитания. Тогда рассмотрим момент, когда
операции прибавления ³⁴ ~~этим~~ впервые стало на
26 больше, чем операций вычитания 34 т.е. мы
только что прибавили 34, и такой момент
обязательно будет, т.к. иначе a в конечном итоге
не сможет стать ≤ -26 , т.к. a каждый раз
меняется макс. на 1. Так
~~Вот~~ Можно заметить, что прибавление 34 меняет
остаток при делении на 33 на 41 (вм. четность на -1).

ЗАДАЧА № 8. 1	ЛИСТ 3 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-8-13 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
---------------	--	--

в то время, как прибавление / вычитание 33 этот
 остаток никак не может измениться. Значит, ^{на экране} ~~или~~
 в этот момент, остаток числа при делении на 33
 равен $8 + 26 \equiv 1 \pmod{33}$. Т.к. $47 = 33 + 14$. От 1 до 100 есть всего
 3 числа с таким остатком: 1, 34 и 67, но так как мы
 только что прибавляли к числу 34, то оно должно быть
 > 34 , а значит оно обязательно равно 67, что
 II случай, операций вычитания ³⁴ было больше операций прибавления

34.
 Тогда $a > 0$. ~~Аналогично~~ ~~Аналогично~~ с ~~II~~ I случаем, рассматривая
~~момент, когда~~ перебором можно найти минимальное
 возможное a , при котором $a - 2, 1, 4, 9, 2, 4, 1, 3$
 оно окажется равным 24. Аналогично с I случаем,
 рассмотрим момент, когда операции вычитания ³⁴ были на
 8 больше, чем прибавления (аналогично с I, такой будет).
 Тогда, число на экране в этот момент равно либо 1, либо
 34, либо 67. Если оно равно 67, то мы все доказали.
 Число, пусть оно равно 34. Можно заметить, что в
 будущем, мы должны будем прибавить к нему 33
 (т.к. иначе мы не сможем ^{увеличить} ~~увеличить~~ a до нужного
 значения, т.к. мы сможем прибавить 34 максимум столько раз,

ЗАДАЧА № 8	ЛИСТ 4 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-8-13 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
------------	--	--

сколько прибавлять). Также, это представление ^{впервые} обязательно должно быть к текущим 34, т.к. число 67 ⁽⁶⁷⁺³³⁼¹⁰⁰⁾ получается > 100 , $34+33=67$, а ^{УТД}.

В случае, когда на экране сейчас 1, всё аналогично, однако нам придётся добавить уже 33. 2 т.к. число 67 не сможет вытеснить 34 нужное кол-во раз, т.к. $1+33=34$, от этого можно учесть аналогично с 1 случаем), $1+33 \cdot 2=67$, ^{УТД}.

2 этап

Значит, в какой-то момент на экране обязательно должно быть 67, ^{УТД}.

ЗАДАЧА № 9. —	ЛИСТ 1 ИЗ 3	М-8-13
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Обозначим за a - первое нечётное число из записанных, n - кол-во записанных нечётных чисел. Тогда, рассмотрим 4 случая: I - 1-ое записанное число - четное, последнее - нечётное; II - 1-ое - нечётное, последнее - четное; III - 1-ое - нечётное, последнее - нечётное; IV - первое четное, последнее - четное.

I случай:

Обозначим за S сумму ^{всех записанных} нечётных чисел, $n(n+1)$ (во всех случаях она равна $a \cdot n + a \frac{n(n-1)}{2} + 2$, т.к.

мы сначала всем числом присвоим a , а потом добавляем к ним нужные значения равные $2 + 4n + 6 + \dots + 2n - 2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 =$ (сумма от 1 до $n-1$ + 2). Тогда, сумма четных в таком случае $S = n$ (каждому четному можно сопоставить в паре с a число $+1$).

Тогда, сумма четных $= n(n-1+a) - n = n(a+n-2)$

II случай:

Аналогично с I случаем, сумма четных здесь $S = n$ (сопоставляем четным в паре с $a-1$) $= n(a+n-1) + n = n(a+n)$

III случай:

Сумма чётных здесь $- \cancel{a(n-2)} - a$ $S - n - a + 1 =$
 $n(a+n-1) - n - a + 1 = (n-1)(a+n-1)$ (чт. I случая вычитаем
 1-ое нечётное. получается)

IV случай:

Сумма чётных здесь $S + n + a - 1 = n(a+n-1) + n + a - 1 =$
 $(n+1)(a+n-1)$ (чт. II случая прибавляем n ~~и~~ первое
 нечётное)

Составим таблицу для всех случаев

Сумма записанных нечётных (S)	Сумма записанных чётных
$n(a+n-1)$	$n(a+n-2)$ ($x=n; y=a+n-1$) I
	$n(a+n)$ ($x=n; y=a+n$) II
	$(n-1)(a+n-1)$ ($x=a+n-1; y=n$) III
	$(n+1)(a+n-1)$ ($x=a+n-1; y=n+1$) IV

Можно заметить, что во всех этих случаях
 сумма записанных нечётных и сумма записанных
 чётных имеет следующий вид ~~$a(n-1)$~~
 (порядок не важен)

xy и $x(y+1)$ $\checkmark$ покажем, что такие числа
 не могут быть одновременно почтими квадратами
 и тогда ни в одном из случаев ~~не~~
 случай из условия произойти не мог.

ЗАДАЧА № 9.

ЛИСТ 3 ИЗ 3

(листы по каждой задаче
нумеруются отдельно)

М-8-13

ШИФР (заполняется
оргкомитетом)

Пусть x, p , где p - простое. Тогда, степень
вхождения p в x должна быть четной (т.к. $x-1 \mid x^p$
и степень вхождения p в x - четная, чтобы p вошло
в $x^{p-1} - 1$ в четной степени, чтобы $x^{p-1} - 1$ было квадратом,
а значит, для того, чтобы x^p было квадратом p
должно входить в x в четной степени. Так как
это выполняется для любого p - x - точный квадрат.
Эт. Тогда, чтобы x^p было точным квадратом - x тоже
точный квадрат. Но тогда, если $x-1$ не точный
квадрат, то $x^{p-1} - 1$ не точный квадрат,
а значит $x-1$ тоже точный квадрат. Однако,
тогда и $x-1$ - точный квадрат, и x - точный
квадрат, а такое невозможно, т.к. $x-1 < x < x+1$
т.к. $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, а значит расстояние
между любыми двумя квадратами ≥ 1 . Тогда, x^p
в одном из $x-1, x, x+1$ случаев не обе суммы
не могут быть точными квадратами, а значит,
такое невозможно.

Ответ: нет