7 баллов

1 лист

ЗАДАЧА № 10.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-03-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Чтобы составить квадрат нужно выбрать прямоугольники. Тогда минимально возможная его сторона будет n, где n — большая сторона самого большого из выбранных прямоугольников. Тогда минимальная площадь квадрата — n^2. ~~Посчитаем суммарную площадь всех прямоугольников со сторонами от 1×1 до 1×n.~~

$$S=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}$$

Тогда из оставшихся прямоугольников нам надо собрать оставшуюся часть квадрата со сторонами n и $n-1$ и площадью n^2-n. Посчитаем суммарную площадь всех фигур от 1×1 до $1\times n-1$

$$S=\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)=\frac{n}{2}\cdot(n-1)=\frac{n^2-n}{2}$$

$\frac{n^2-n}{2} < n^2-n$ При любом $n > 1$ значит, даже если мы задействуем все возможные для выбора фигуры мы не достигнем требуемой площади. Значит составить квадрат из наших фигур нельзя.

7 баллов

ЗАДАЧА №10.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-03-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

x^2+x+1; y^2+y+1; z^2+z+1 отличаются только переменной, значит, имеют совпадающие графики. Найдём их общий минимум (он будет, так как ветви каждой из парабол направлены вверх). $x_0=\frac{-1}{2\cdot1}=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_0=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=$
$=\frac{3}{4}$ - минимальное значение. Подставим это значение на место каждого знаменателя.

$$\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{12}{3}=4$$

То есть, максимальное значение, которого может достигнуть эта сумма: 4. Но это может произойти только тогда, когда $x=y=z=$ $=\cancel{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$. Но $x\neq y\neq z$. Значит, если какой-то из знаменателей достигнет минимума, то остальные знаменатели обязательно будут больше. Значит, сумма всегда будет меньше 4.

Ответ: не может.

7 баллов

ЗАДАЧА № 10.7	ЛИСТ 1 ИЗ 1	10-03-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Могли, например в таком ряду натуральных последовательных чисел:

1234567890 0; 1234567890 1;

1234567890 2; 1234567890 3

1234567890 4; 1234567890 5;

1234567890 6; 1234567890 7

1234567890 8; 1234567890 9

Каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно 11 раз.

Ответ: могут

Обаимов Р.

ЗАДАЧА № 10.9	ЛИСТ 1 ИЗ 2	10-03-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$

1) Если a, b и c – чётное:

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ – нечётное число

$a+bc$ – чётное $\Rightarrow$ a, b и c не могут быть одновременно чётными.

2) Если a и b – чётное, c – нечётное:

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ – чётное

$c+ba$ – нечётное $\Rightarrow$ не может случиться так что одно из чисел – нечётное, остальные чётные.

3) Если a – чётное, b и c – нечётное:

$\cancel{(a^2+1)(b^2+1)(c}$

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ – чётное

$a+bc$ – нечётное $\Rightarrow$ не может случиться так, что одно из чисел – чётное, а остальное нечётное.

ЗАДАЧА №10.9	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-03-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

4) если a, b и c – нечётные:
$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ – чётное

$a+bc$ – чётное
$b+ca$ – чётное $\Rightarrow$ a, b и c могут быть
$c+ba$ – чётное только нечётными числами.

Но $a+bc$, $b+ca$ и $c+ba$ – чётные числа и должны быть простыми делителями числа $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$. То есть каждое из чисел $a+bc$, $b+ca$, ~~$c+ba$~~ $c+ba$ является простым. Единственное простое натуральное чётное число: 2. То есть нас удовлетворяет вариант, когда $a+bc = b+ca = c+ba = 2$. Это может произойти только тогда, когда $a=b=c=1$.

Ответ: $a=b=c=1$.