7 баллов

ЗАДАЧА № 10.1	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Предположим, что Олег составил такой квадрат. Пусть самый большой прямоугольник который он использовал это прямоугольник $1 \times n$ клеток.
($n \in N$, $1 \leq n \leq 2024$)

Тогда площадь этого квадрата, как минимум n^2 клеток (это в случае, если прямоугольник $1 \times n$ составляет одну его сторону, в ~~другом~~ случае если он составляет лишь часть стороны, площадь будет ещё больше)

Тогда ~~в~~ суммарная площадь всех остальных прямоугольников, составляющих этот квадрат: $(n^2 - n)$ клеток.

С другой стороны, так как $1 \times n$ — самый большой прямоугольник, то максимальная суммарная площадь всех остальных это сумма всех площадей от 1 до $(n-1)$. Она равна $\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

ЗАДАЧА № 10.1	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-01 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

Получаем, что площадь квадрата (обозначим её буквой S)

$S \geqslant n^2 - n$ и $S \leqslant \frac{n^2 - n}{2}$

$$\frac{n^2-n}{2} \geqslant n^2 - n \quad |\cdot 2$$

$$n^2 - n \geqslant 2n^2 - 2n$$

$$0 \geqslant n^2 - n$$

$$n \geqslant n^2 \quad |:n \quad (\text{т.к. } n \in N)$$

$$1 \geqslant n$$

Получается, что максимальный прямоугольник, который мог взять Олег это 1×1, и составить из него квадрат 1×1. Это противоречит условию.

Ответ: Нет, такой квадрат составить нельзя.

Обсудил ~~(подпись)~~

ЗАДАЧА № 10.3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-01 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

~~[illegible]~~

В свой первый ход Зоя закрасит одну из точек в ~~[illegible]~~ какой-либо цвет.

В свой первый ход Боря (который хочет сделать как можно меньше разноцветных пар) закрасит соседнюю точку в такой же цвет.

Своим вторым ходом Зоя закрасит одну из точек, соседних с закрашенными в другой цвет.

Получается, если рассматривать все закрашенные в любой момент игры точки как дугу, то:

1) После чётных ходов Зои эта дуга имеет концы разного цвета.

2) После нечётных ходов Зои эта дуга имеет концы одного цвета.

3) Ходы Бори на цвет концов дуги не влияют.

ЗАДАЧА № 10.3	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-01 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

Зоя сделает 50 ходов. Из них 49 (все кроме первого) будут добавлять одну разноцветную пару. В последний (50-ый) ход на концах дуги закрашенных ~~клеток~~ точек будут разного цвета, и какого бы цвета Зоя не поставила последнюю точку, это добавит ещё одну разноцветную пару. 49 + 1 = 50

Ответ: 50 пар.

0 баллов

ЗАДАЧА № 10.4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-01 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

Самое большое число, из тех которые есть в ряду - это 1000.

Значит, мы точно можем выбрать несколько подряд идущих чисел, сумма которых больше 100 000 но меньше 101 000. Обозначим её буквой S.

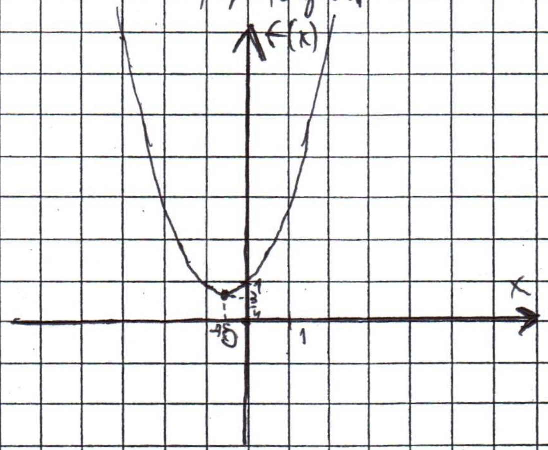
Будем рассматривать $S \geq 100\,500$ (иначе условие уже выполнено)

7 баллов

ЗАДАЧА № 10.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим $f(x) = x^2 + x + 1$

График этой функции:



Из него видно, что

$x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$, следовательно

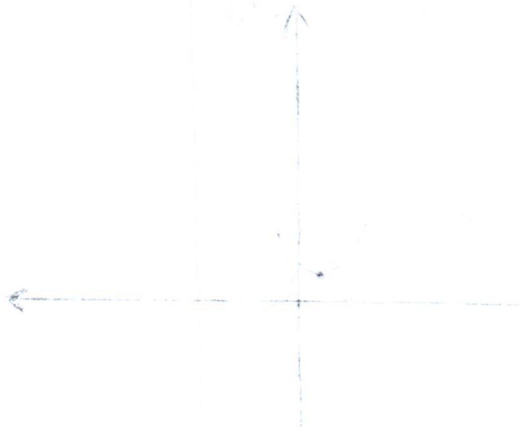
$\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$

Для переменных y и z рассуждения аналогичны. Получается, что максимальное значение выражения

$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$

Это возможно только при $x = y = z = -0,5$ (а по условию x, y и z — различные)

При других значениях x, y, z выражение не будет равняться 4. Ответ: Нет.



7 баллов

ЗАДАЧА № 10.7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: да, могут.

Пример: 987654321000

987654321011

987654321022

987654321033

987654321044

987654321055

987654321066

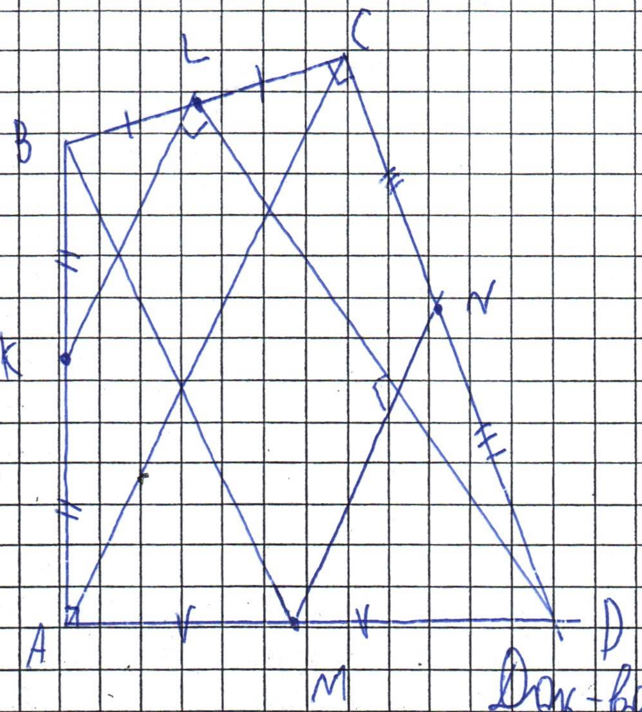
987654321077

987654321088

987654321099

1 балл

ЗАДАЧА № 10 . 8	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-10-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано: 4х угольник $ABCD$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, K - сер AB, L - сер BC, N - сер CD, M - сер AD, $AKLD$ - впис.

Док-ть: $BMNC$ - впис. 4х уг.

Док-во.

1) 4х угольник $AKLD$ - впис. $\Rightarrow \angle KAD + \angle KLD = 180^\circ$

$\angle KLD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

2) пров. AC

$\left.\begin{array}{l} K\text{ - сер } AB \\ L\text{ - сер } BC \end{array}\right\} KL$ - ср. л. $\triangle ABC \Rightarrow KL \parallel AC$

$\left.\begin{array}{l} N\text{ - сер } CD \\ M\text{ - сер } AD \end{array}\right\} NM$ - ср. л. $\triangle ACD \Rightarrow NM \parallel AC$

$\Rightarrow KL \parallel NM$

3) $\left.\begin{array}{l} \angle KLM = 90^\circ \Rightarrow LD \perp KL \\ KL \parallel NM \end{array}\right\} \Rightarrow LD \perp NM$ ~~...~~