7 баллов Богд-

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	9-07-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№ 9.1

Рассмотрим квадрат $n \times n$ => он может состоять из полос длины не больше n => 1×1, 1×2; 1×3 ... $1\times n$. Если квадрат можно составить, то площадь первого меньше или равна площади второго

$$n^2 \overset{?}{\leq} 1+2+3+\ldots+n$$

$$n^2 \overset{?}{\leq} \frac{n(n+1)}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2n^2 \overset{?}{\leq} n^2+n$$

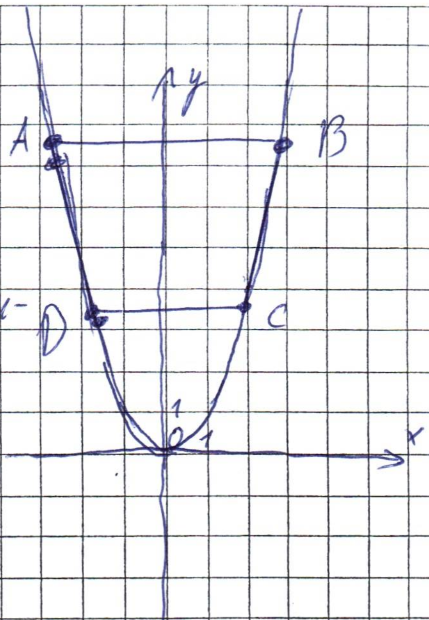
$$n^2 \overset{?}{\leq} n$$ => не верно так как $n > 1$ => нельзя составить такой квадрат

Ответ: нет

7 баллов Богд1-

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№9.2



Возьмём произвольную трапецию удовлетворяющую условию, так как её вершины лежат на параболе =>

~~они~~ $A(-x_1; x_1^2)$ $B(x_1; x_1^2)$

$C(x_2; x_2^2)$ $D(-x_2; x_2^2)$

Зададим прямую проходящую через точки A и C; и прямую проходящую через B и D - они являются диагоналями трапеции

Прямая 1 $\dfrac{x-(-x_1)}{-x_1-x_2} = \dfrac{y-x_1^2}{x_1^2-x_2^2}$

Прямая 2 $\dfrac{x-x_1}{x_1-(-x_2)} = \dfrac{y-x_1^2}{x_1^2-x_2^2}$

~~Пр~~ Выразим y; $y=(x+x_1)(x_2-x_1)+x_1^2$

$y=(x-x_1)(x_1-x_2)+x_1^2$

Найдём точку пересечения по x; $(x+x_1)(x_2-x_1) = (x-x_1)(x_1-x_2)$ => $2xx_2 = 2xx_1$, так как $x_1 \neq x_2$ (трапеция) => $x=0$

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№9.2

Подставим 0 в первоначальные уравнения

$y = -x_1^2 + x_1 x_2 + x_1^2 = \frac{k}{4}$

$y = -x_1^2 + x_1 x_2 + x_1^2 = \frac{k}{4}$

Заметим, что $AB \cdot CD = k \Rightarrow 2x_1 \cdot 2x_2 = k \Rightarrow$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{k}{4} \Rightarrow$ Независимо от выбора x_1 и x_2, точка пересечения диагоналей $(0; \frac{k}{4})$

7 баллов Богд-

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№9.3

Рассмотрим рыцаря в команде B ⇒ он выиграл ≥ ≥2 рыцаря, рассмотрим того рыцаря, которого он выиграл ⇒ он сказал что проиграл лжецу ⇒ он соврал ⇒ такой ситуации быть не может ⇒ команда B состоит из лжецов.

Пусть A полностью состоит из рыцарей ⇒ лжец может выиграть не более 1 рыцаря, а команда A проиграла, но в A больше людей, чем в B ⇒ найдется лжец из B который выиграл ≥ 2 Р ⇒ противоречие и в команде A есть лжец.

Рассмотрим лжеца из A, так как вся команда B лжецы ⇒ он не может проиграть ⇒ команда A выиграла, заметим что при этом никаких противоречий не возникает ⇒

Ответ: A

7 баллов Богд

ЗАДАЧА № 9.4	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№9.4

Расcмотрим число 500, Будем добовлять к группе содержащей 500 числа, по одну сторону от него (по левую) пока не достигнем момента, что из ~~числа ≤ 100~~ группы сумма в которой ≤ 100000 стала группой сумма в которой > 100500

Если слева нету столько чисел, будем добавлять справа, пока сумма не станет > 100500

Если и справа и слева чисел не достаточно, то сумма чисел от 1 до 1000 ≤ 100500·2 − 500 ⇒ сумма чисел ≤ 200500; что не верно ведь сумма чисел от 1 до 1000 = (1+1000) 500 = 500500

Расcмотрим тот момент когда ~~число~~ ~~число~~ сумма в группе стала > 100500

Если до этого при прибавлении она была > 100000, но ≤ 100500 ⇒ мы нашли ту группу и доказали задачу

Если нет ⇒ из группы > 100500, уберём 500 (она стоит скраю ⇒ возможно). Докажем что получившая-ся группа удв. усл. На предпоследнем добавлении шаге сумма группы ≤ 100000 ⇒ после этого добавив число группа ≤ 101000, убрав 500 ≤ 100500

ЗАДАЧА № 9.4	ЛИСТ 2 ИЗ 2	9-07-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

На последнем ~~числе~~ шаге сумма группы $> 100500 \Rightarrow$ Убрав 500 сумма $> 100000 \Rightarrow$ Мы ~~каким~~ можем найти такую группу в любом случае

0 баллов Богд

ЗАДАЧА № 9.5	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Дано: $\triangle ABC$; $AB=BC$; $AC=DE$; $\angle CFE=\angle DEF$

Доказать $\angle$ ~~CFE~~ $\angle ABC = 2\angle DFE$

$\angle ABC = 180^\circ - 2\angle A \Rightarrow$

DFE должен быть $= 90^\circ - \angle A$

~~Пусть AL = EL; ABC p/б~~

~~Доказательство~~

$-\angle EFL + \angle A = \angle FEL +$

$+\angle EDL$ ($\angle ELF$ внешний для $\triangle EDL$ и $\triangle CFL$)

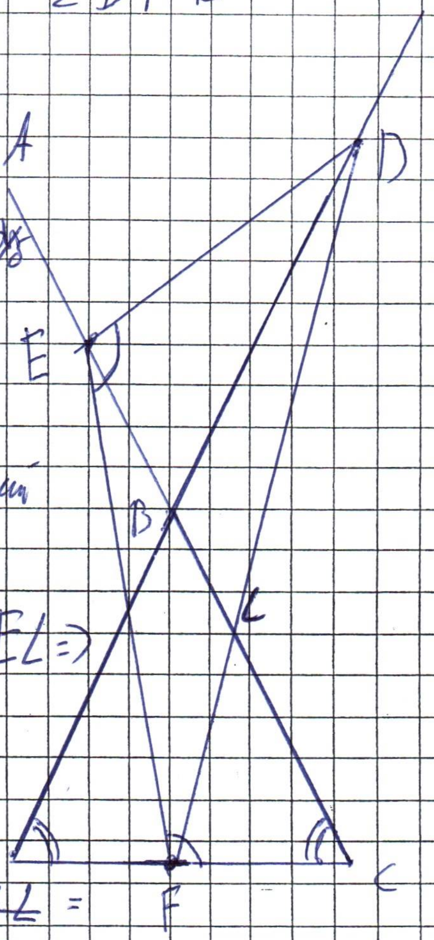
$\angle EDL = \angle A - \angle EFL + \angle FEL \Rightarrow$

~~$\angle DFE = 180^\circ - \angle FED -$~~

~~$-\angle A + \angle EFL + \angle FEL =$~~

~~$= 180^\circ - \angle LED - \angle A - \angle EFL$~~ =

= ~~ALFC ∠ LED~~ $\angle EFC$



~~$\angle EFD = 180^\circ - \angle EDL - \angle F = 180^\circ - \angle E - \angle A - \angle FEL +$~~

~~$+ EFL = \angle EFL$~~

7 баллов Богд—

ЗАДАЧА № 9 . 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=10$;

$b_1=a_1(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)$; $b_2=a_2(a_1+a_3+a_4\ldots a_7)$

...; $b_7=a_7(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$

Заметим что всего 4 различных числа => пусть

$b_x=b_y$ => $a_x(a_1+a_2\ldots+a_7-a_x)=a_y(a_1+a_2\ldots+a_7-a_y)$

Заметим что слева и справа сократятся $a_x a_y$ =>

$a_x(a_1+a_2\ldots+a_7-a_x-a_y)=a_y(a_1+a_2+\ldots+a_7-a_x-a_y)$

Так как $b_x=b_y$, но $a_x\neq a_y$ => $a_1+a_2+\ldots a_7-a_x-a_y=0$ =>

=> $a_x+a_y=10$

~~Если~~ Заметим что мы рассмотрели только 2 схожих b, а надо ещё 2 (так как сейчас у нас могут быть ~~не равны~~ 6 различных значений b, а надо 4)

Если $b_n=b_x$ => $a_n+a_x=10$ => $a_n=a_y$ - противоречие =>

=> не могут быть более 2 равных числа b => $b_n=b_k$, и

$b_q=b_z$ => $a_x+a_y=10$; $a_n+a_k=10$; $a_q+a_z=10$; а

сумма всех семи чисел $=10$ => существует число $=-20$

Ответ: -20

7 баллов Богд.-

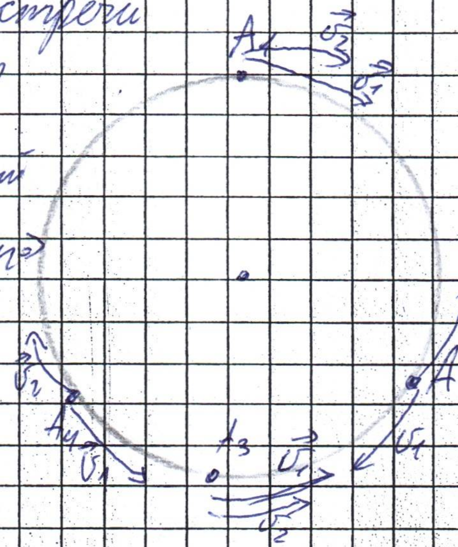
ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть $v_1 > v_2$; A_1 – отмеченая точка ;

Пусть A_2 ; A_3 ; A_4 .. A_{101} точки их встречи

Заметим что встреча тараканов произойдёт после того как первый обгонит второго на целый круг ⇒ посчитаем какое растояние ~~он~~ пройдёт первый ; $(v_1 - v_2)t_1 = 1м$

$S_1 = v_1 t_1$



Вторая встреча произойдёт когда первый и второй пробегут 1м ~~⇒ v_1~~ вместе ⇒ $(v_1 + v_2)t_2 = 1м$ ⇒ $S_1 = v_1 t_1 + v_1 t_2$

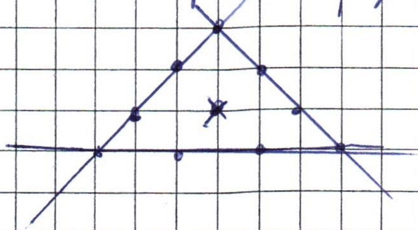
Третья встреча произойдёт когда 1 обгонит 2 на 1м ⇒ $(v_1 - v_2)t_3 = 1м$ ⇒ $t_3 = t_1$; заметим что первый таракан бежит в обратную сторону ⇒ $S = v_1 t_1 + v_1 t_2 - v_1 t_1 = v_1 t_2$

Четвёртая встреча : $(v_1 + v_2)t_4 = 1м$ ⇒ $t_4 = t_2$; таракан 1 бежит в обратну сторону ⇒ $S_1 = v_1 t_2 - v_1 t_2 = 0м$ ⇒ $A_5 = A_1$, заметим что в A_5 $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ смотрят в ту же сторону, что и в A_1 ⇒ тараканы замкнулись в цикл ⇒ $A_1 = A_5 = A_9$ .. $= A_{101}$ ⇒ В 100-ой встрече $S_1 = 0м$ ⇒

Ответ : 0м

7 баллов Бацук

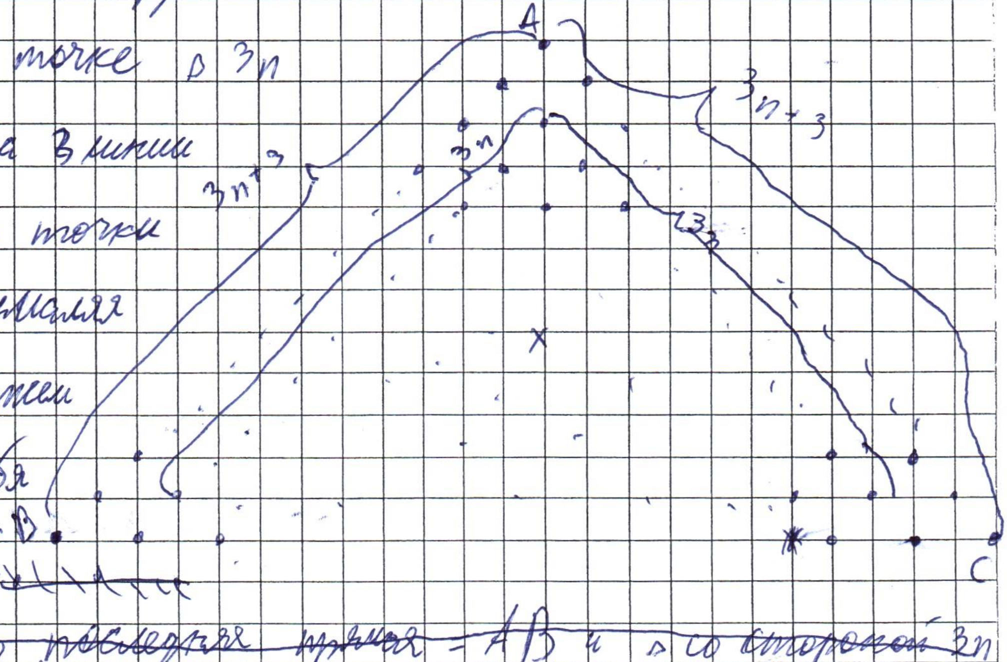
ЗАДАЧА № 9.9	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Рассмотрим треугольник со стороной 3 ⇒ существует единственное расположение 3-ёх линий покрывающих все точки.

Докажем что для ~~3n+3~~ треугольника со стороной 3n+3 существует единственное расположение линий, ~~так~~ так чтобы они покрывали все точки, если для 3n Δ существует единственное расположение.

Представим Δ со стороной 3n+3, как Δ 3n окружённый ещё одним кругом точек ⇒ выколотая т. Δ3n+3 = выколотой точке Δ3n



Заметим что за 3 линии надо закрыть точки A, B, C. Неумоляя общности скажем что 2 из них обязательно AC и BC.

~~Докажем, что последняя прямая - AB и Δ со стороной 3n~~

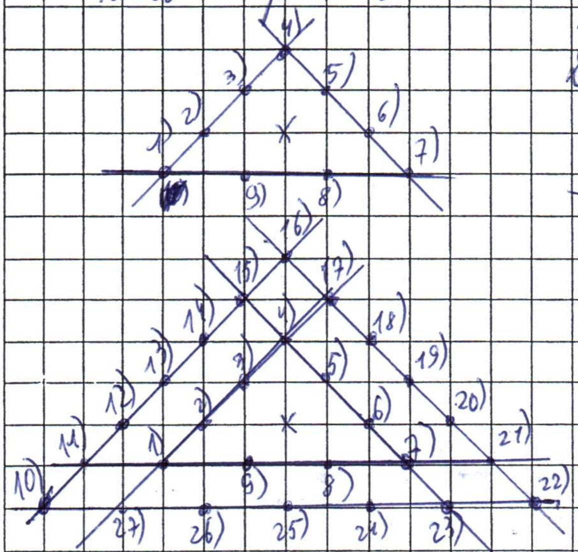
так как не существует прямой принадлежащей Δ 3n, и закрывающей эти 3 точки

ЗАДАЧА №9.9	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим Δ $3n$, на его стороне $3n+1$ точка $\Rightarrow$ не все $\parallel$ параллельны $\Rightarrow$ существуют из $3n$ прямых прямые $\parallel AB$; $\parallel AC$, $\parallel BC$

Рассмотрим сторону $3n+3$ на ней $3n+4$ точка, а прямых всего $3n+3 \Rightarrow AB$ прямая существует. Заметим что прямые AB; BC; AC никак не влияют на Δ со стороной $3n \Rightarrow$ его можно закрыть единственным способом за $3n$ прямых $\Rightarrow$ и Δ $3n+3$ единственным способом за $3n+3$ прямые

Рассмотрим способы разбиения на множества



Для Δ, $n=1$; Способы (1)2)3)4); 5)6)7); 8)9))$\cdot 6$ (1)2)3); 4)5)6); 7)8)9))$\cdot 2 \Rightarrow$ 8 способов (6, где на 1 линии 4 точки на 2) 3 точки на 3) 2 точки и 2 способа по 3 на всех линиях)

Для Δ; $n=2$. Заметим точки 18); 19); 20); 26); 25); 24) 12); 13); 14) ~~не влияют~~ точно принадлежат 1 линии. Относительно точек 10); 22); и 16) разбиваются на 8 дополнительных случаев, относительно точек 11); 27) 23); 21); 17); 15)

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Относительно точек 11); 27); 23); 21) 17); 15) ещё на 2^6 ⇒ способов для $n = 2$: $2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 2^{12}$

~~Относи~~ Для $n = 3$ дополнительно 2^3, ещё точки слева от 10) и 11), ниже и левее от. 10) 27), ниже и правее от. 23) 22) правее от. 22) 21) выше и левее от. 15) и 16), выше и правее от. 16) и 17) ⇒ с каждым n количество способов домножается на 2^3, а также на $2^{6(n-1)}$

Для $n = 37$ ⇒ это Δ со стороной 111

кол-во способов $= 2^{3\cdot 37} \cdot 1 \cdot 2^6 \cdot 2^{12} \cdot \ldots \cdot 2^{6\cdot 36}$

$\cancel{= 2^{3\cdot 37} \cdot 2^{6\cdot 36} \cdot 2^{(1+2+3+4+5..+36)} = 2^{3\cdot 37 + 6\cdot 36 + 37\cdot 18} = 2^{995}}$

~~Ответ~~ $\cancel{2^{995}}$

$6 + 12 + 18 + 24 .. + 6\cdot 36 = 6(1+2+3+..+36) =$

$= 6\cdot 37\cdot 18 = 6\cdot 666 = 3996$; $3996 + 111 = 4107$

Ответ: 2^{4107}

0 баллов Фролов

ЗАДАЧА № 9.10	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

~~Заметим, что если число сумму цифр имеет кр~~

Заметим, что если у двух чисел сумма цифр ~~кратна 3, что~~ у одного кратна 3 а у другого нет $\Rightarrow$ у них тогда отличаются цифры в десятичной записи. Если $n \overset{3}{\equiv} 0$ $n+1 \overset{3}{\equiv} 1$ $\Rightarrow$ $n^2 \overset{3}{\not\equiv} (n+1)^2$ ÷

Если $n \overset{3}{\equiv} 2$, $n+1 \overset{3}{\equiv} 0$ $\Rightarrow$ $n^2 \overset{3}{\not\equiv} (n+1)^2$ $\Rightarrow$ $n \overset{3}{\equiv} 1$, $n+1 \overset{3}{\equiv} 2$ $\Rightarrow$ $n^2 \overset{3}{\equiv} (n+1)^2 \overset{3}{\equiv} 1$ Рассмотрим число относительно ост. при делении на 9. Заметим что, тогда (перебором) $n \overset{9}{\equiv} 4$ $n+1 \overset{9}{\equiv} 5$; $n^2 \overset{9}{\equiv} (n+1)^2 \overset{9}{\equiv} 7$

Введём систему отсчета в которой 28 цифр. Заметим, что теперь если сумма цифр в числе ⋮ 27, то и оно ⋮ 27. Для удобства каждая цифра будет оканчиваться) $\Rightarrow$ Если $n \overset{27)}{\equiv} 10)$ $n+1) \overset{27)}{\equiv} 11)$

$n^2 \overset{27)}{\equiv}$