

4 балла - Бонус

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	9-03-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: нет.

Пусть Олегу удастся составить квадрат $k \times k$. Тогда он мог использовать прямоугольники $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times k$ (~~различные~~ прямоугольник $1 \times n$ не может содержаться в квадрате $k \times k$ если $n > k$) $\Rightarrow$ Суммарная площадь этих прямоугольников $\geq$ площадь квадрата, т.е. $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot k \geq k \cdot k$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k \geq k^2$$

$$\frac{k(k+1)}{2} \geq k^2 \Rightarrow k^2 + k \geq 2k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 - k \geq k^2 \Rightarrow$$

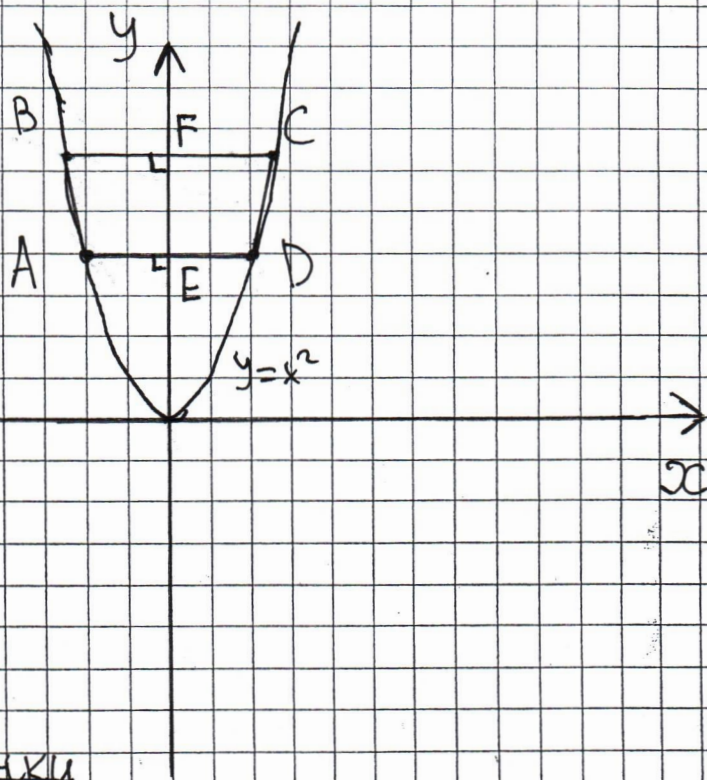
$$\Rightarrow \cancel{k} \cancel{-k} 1 \geq k \Rightarrow k=1$$

Но по условию квадрат 1×1 быть не может, т.к. его площадь $= 1 \Rightarrow$ Противоречие

7 баллов Балл

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	---	--

Докажем, что диагональ такой трапеции всегда проходит через точку $(0; \frac{k}{4})$



Пусть y — точки

Пусть C' — точка, симм. ~~В~~ относительно оси y . Т.к. парабола симм. отн. оси y , C' также лежит на параболе, а ещё C' лежит на перпендикуляре прямой, проходящей через $B \perp$ оси y . Прямая BC тоже $\perp$ оси $y \Rightarrow$ C и C' совпадают (т.к. прямая, прох. черз $B \perp$ оси y пересекает параболу в ≤ 2 точках и одна из них — B)

Пусть у т. А, координаты $(a; a^2)$ (вторая координата - квадрат первой, т.к. $A \in$ параболе $y = x^2$),
А у т. С - $(c; c^2)$

Тогда прямая $y = (a+c)x - ac$ проходит через А и С $\Rightarrow$ это диагональ (т.к. через 2 различные точки на плоскости проходит ровно 1 прямая)

Заметим, что $y = (a+c)x - ac$ пересекает ось Oy в точке $(0; -ac)$. Т.к. В симм. D

отн. оси Ox , $BD = 2BE = -2a$ (т.к. $a < 0$),
а В симм. D

Т.к. В симм. C отн. оси Oy , $BC = 2CF = 2c$

Т.к. А симм. D отн. оси Oy , $AD = 2AE = -2a$
(т.к. $a < 0$)

$$\Rightarrow AD \cdot BC = -4ac = k \Rightarrow -ac = \frac{k}{4}$$

$\Rightarrow$ диагональ AC задаётся ур-ем $y = (a+c)x - ac$
и проходит через $(0; -ac)$. Аналогично BD
проходит через $(0; \frac{k}{4})$

$\Rightarrow$ точка пересечения диагоналей
трапеции не зависит от координат
её вершин

7 баллов Балл-

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 1 ИЗ 2	9-03-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: А.

Пусть в В есть ~~один~~ рыцарь. Тогда он выиграл у ≥ 2 рыцарей из А. Но тогда рыцарь из А, проигравший рыцарю из В выиграл все игры до этой и после этой больше не играл. Но тогда он не мог проиграть лжецу, а значит собрал.

Противоречие

$\Rightarrow$ Команда В полностью состоит из лжецов

Пусть команда В выиграла.

Предположим, в А есть лжец. Тогда т.к. команда В выиграла, все игроки из А

проигрывают партию $\Rightarrow$ лжец из А проиграл лжецу из В (т.к. в В все лжецы)

Но тогда он сказал правду, когда говорил, что проиграл лжецу. Противоречие

$\Rightarrow$ в А все игроки — рыцари

Заметим, что если В выиграла, то какой-то игрок из В выиграл ≥ 2 игры (т.к. в В меньше игроков чем в А) $\Rightarrow$

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 2 ИЗ 2	9-03-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШПФР (заполняется оргкомитетом)

^{существует}
 $\Rightarrow$ Лжец из ^{которой} В выиграл ≥ 2 рыцарей из
 А $\Rightarrow$ этот лжец сказал правду.

Противоречие

$\Rightarrow$ Команда В не могла выиграть

$\Rightarrow$ Выиграла команда А (т.к. игра конечна)

7 баллов (уровень)
0 баллов Бонус

ЗАДАЧА № 9.4	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	---	--

Пусть последовательность будет $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$
 Рассмотрим ^{наименьшее} такое k , что
 $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 100\,000$, а
 (такое k есть, т.к. $1+2+\dots+1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} > 100\,000$)

Тогда $a_{k+1} + a_1 + a_2 + \dots + a_k > 100\,000$

Тогда $a_{k+1} \geq 100\,000$

Пусть последовательности $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$
 при $100\,000 < a_i + a_{i+1} + \dots + a_j \leq 100\,500$ не существует
 быет

Тогда $a_{k+1} \geq 100\,501 - \frac{100\,000}{99\,999} = 501$

Теперь рассмотрим такое i , что
 $k < i < k+1$

Пусть $a_1 + \dots + a_k = S$

Тогда $S + a_{k+1} - a_1 \leq 100\,000$

$S + a_{k+1} - a_1 > 100\,500$ (т.к. $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ не лежат в промежутке $(100\,000; 100\,500]$)

$$\Downarrow$$

$$a_1 \geq S + a_{k+1} - 100\,000 \geq 501$$

$$a_1 < 100\,500 - S + a_{k+1} - 100\,500 \leq a_{k+1} - 500$$

(т.к. $S \leq 100\,000$)

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \geq 501 \\ a_1 < 500 \end{cases}$$

ЗАДАЧА № 9.4	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-01 ППФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	--	---

$$\Rightarrow a_1 \neq 500$$

Далее "выкидываем" a_1 из последовательности и проводим аналогичные рассуждения где не где исходной последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$, а где последовательности $a_2, a_3, \dots, a_{1000}$. ~~и т.д.~~ Аналогично получаем, что $a_2 \neq 500$ и т.д.

Заметим, что где последовательности $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{1000}$ нельзя применить рассуждение, описанное выше и показать, что $a_i \neq 500$ только если $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{1000} < 100\,000$. Но тогда в последовательности $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{1000} < \overset{450}{500}$ ~~заб~~ чисел

$$\text{(т.к. } \underbrace{a_i + a_{i+1} + \dots + a_{1000}}_{\geq 500 \cdot 450} \geq \frac{500 \cdot 501}{2} = 125\,250 > 100\,000)$$

$\Rightarrow$ С помощью рассуждения выше можно доказать, что $a_1, a_2, \dots, a$ первые ~~600~~ ~~500~~ 525 чисел в последовательности

$a_1, a_2, \dots, a_{1000} \neq 500$. Аналогично можно показать, что последние 525 чисел в ней $\neq 500$ (если начинать не с a_1 , а с a_{1000}) $\Rightarrow$ в посл-и

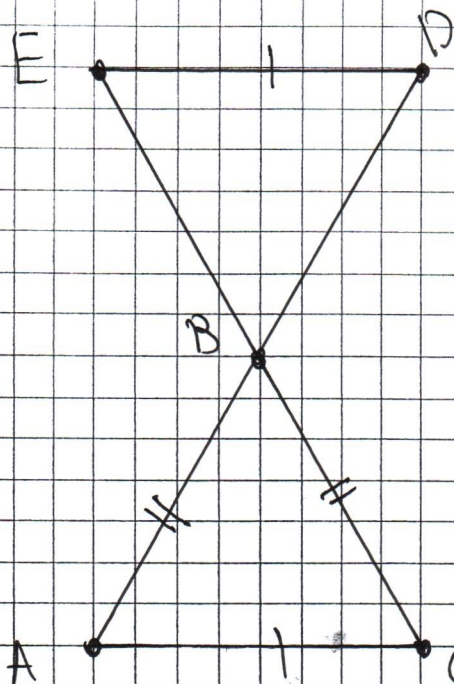
Ответ: Нет

Нет чисел $= 500$, что противоречит условию

7 баллов Бейс

ЗАДАЧА № 9.5	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-01 ШПФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	---	--

1) Пусть $AC \parallel DE$



$$\angle BAC = \angle BDE$$

$$\angle BCA = \angle BED$$

(из 11-4)

$$AC = DE$$



$$\triangle ABC = \triangle DBE$$

по 1-му пр.

$$\Rightarrow AE \perp$$

$$BC = AB = BE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EAC = 90^\circ$$

Т.к. $F \in AC$, $\angle CFE + \angle DEF = 180^\circ$ (из 11-4)

$$\text{По усл. } \angle CFE = \angle DEF \Rightarrow \angle CFE = \angle DEF = 90^\circ$$

$\Rightarrow F = AC \cap \text{перпендикуляр к } DE \Rightarrow$

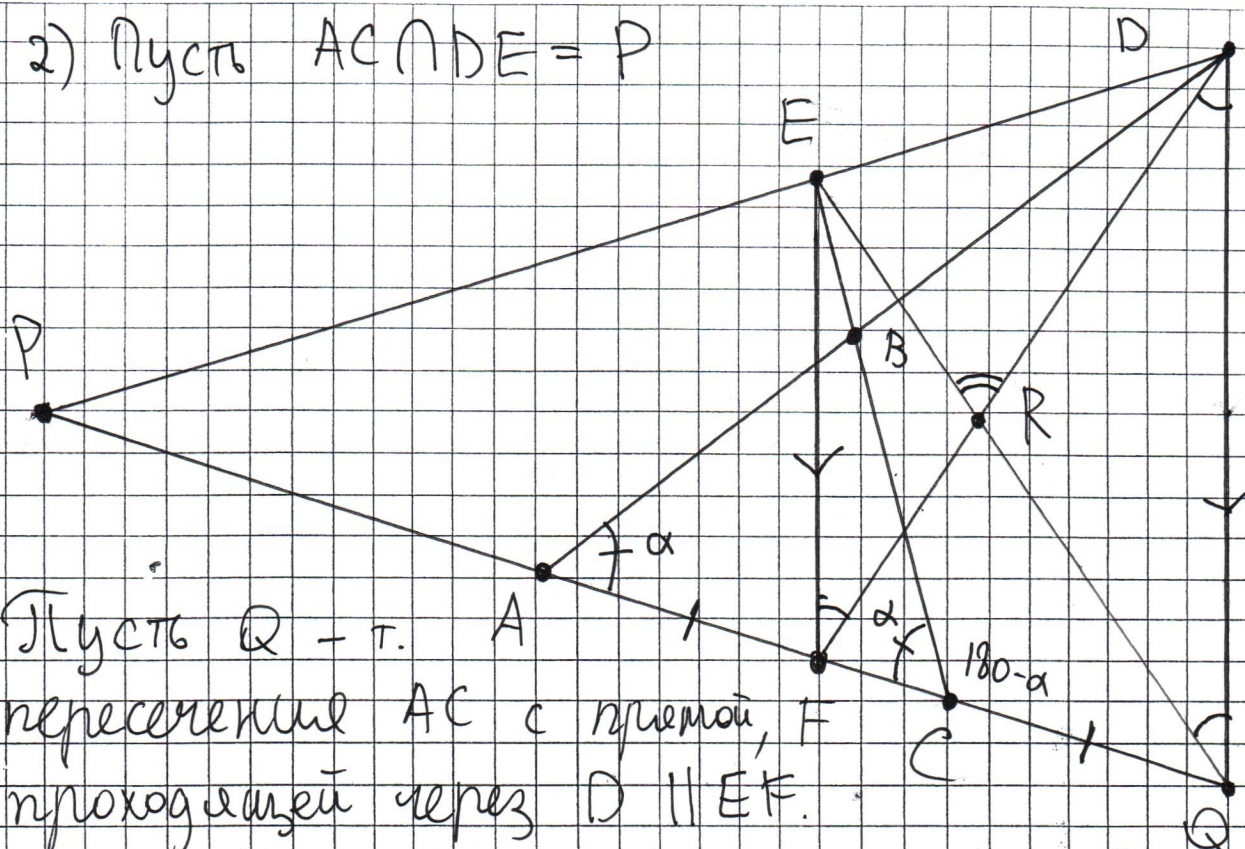
$$\Rightarrow F = A \Rightarrow \angle DFE = \angle DAE = \angle BAE = \angle AEB = \angle ABC/2$$

в сумме $\angle ABC$

ЛТГ.

ЗАДАЧА № 9.5	ЛИСТ 2 ИЗ 3	9-03-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

2) Пусть $AC \cap DE = P$



Пусть Q — т. A пересечения AC с прямой, проходящей через $D \parallel EF$.

Т.к. $\angle CFE = \angle QFE = \angle DEF$, трапеция $FEDQ$ — np

$$\Rightarrow AC = DE = FQ \Rightarrow AF = CQ \text{ и } DF = EQ$$

$$\angle EFD = \angle DQR = \angle RDQ \text{ (т.к. } EFQD \text{ — } np \text{ трапеция)}$$

$$\Rightarrow 2\angle EFD = \angle RDQ + \angle DQR = \angle DRE$$

По условию $\triangle ABC$ — $np \Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$

$$\text{Заметим, что } 2 \cdot R_{AFD} = \frac{DF}{\sin \alpha} = \frac{EQ}{\sin 180 - \alpha} = 2 \cdot R_{ECQ}$$

(R_{XYZ} = радиус опис. окр. $\triangle XYZ$) (теорема синусов)

$$\Rightarrow 2R_{AFD} = 2R_{ECQ}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \parallel \\ & \frac{AF}{\sin \angle ADF} = \frac{CQ}{\sin \angle CEQ} \Rightarrow \text{т.к. } AF = CQ, \sin \angle ADF = \sin \angle CEQ \\ & \parallel \parallel \\ & \sin \angle BER = \sin \angle BDR \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \angle BER + \angle BDR < \angle FED + \angle EDQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BER + \angle BDR \overset{\text{суммы равны}}{\neq} 180^\circ \Rightarrow \angle BER = \angle BDR, \text{ т.к. их}$$

$$\Rightarrow \angle BER = \angle BDR \Rightarrow BERD - \text{вписанный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DRE = \angle EBD = \angle ABC \quad \#$$

$$\Rightarrow 2\angle EFD = \angle ABC, \text{ что.}$$

Ответ: -20.

Пусть числа Пети это a, b, c, d, e, f, g

~~Т.к. из 7 произведений только 4 различных,
есть 2 числа с равными произведениями~~

~~НЧО это a и b~~ Предположим, есть 2 числа с равн.

Тогда $a \cdot (b+c+d+e+f+g) = b \cdot (a+c+d+e+f+g)$ ^{ным произведением (НЧО a и b)}

$$a \cdot (10-a) = b \cdot (10-b)$$

$$10a - a^2 = 10b - b^2$$

$$10a - 10b = a^2 - b^2$$

$$10(a-b) = (a-b)(a+b) \quad | : (a-b), \text{ т.к. по усл. } a \neq b$$

$$10 = a+b$$

Т.к. всего произведений 7, а различных из них 4, есть ровно 3 пары чисел с равными произведениями. Пусть у каких-то двух пар есть общее число (НЧО первая пара - a и b , вторая - b и c).

Тогда по рассуждению выше $a+b=10$ и

$$b+c=10 \Rightarrow a=c \quad \text{Противоречие} \Rightarrow$$

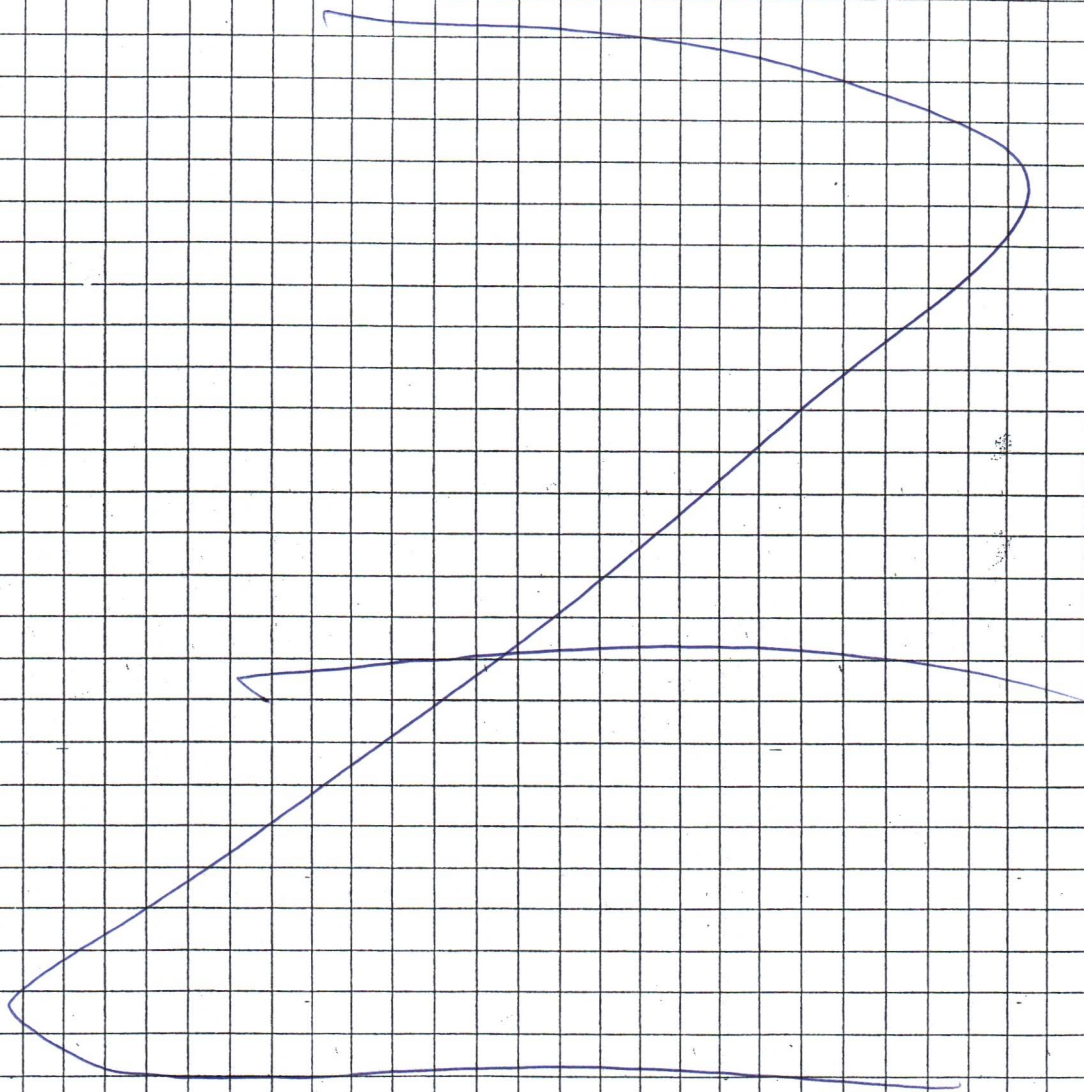
$\Rightarrow$ эти 3 пары. Никакие 2 пары не имеют общего числа $\Rightarrow$ эти пары содержат 6 чисел,

ЗАДАЧА № <u>9.6</u>	ЛИСТ <u>2</u> ИЗ <u>2</u>	<u>9-03-02</u>
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШПФР (заполняется оргкомитетом)

которые дают в сумме $3 \cdot 10 = 30$

По условию сумма всех чисел $= 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Оставшееся число $= 10 - 30 = -20$



7 баллов *Богд*

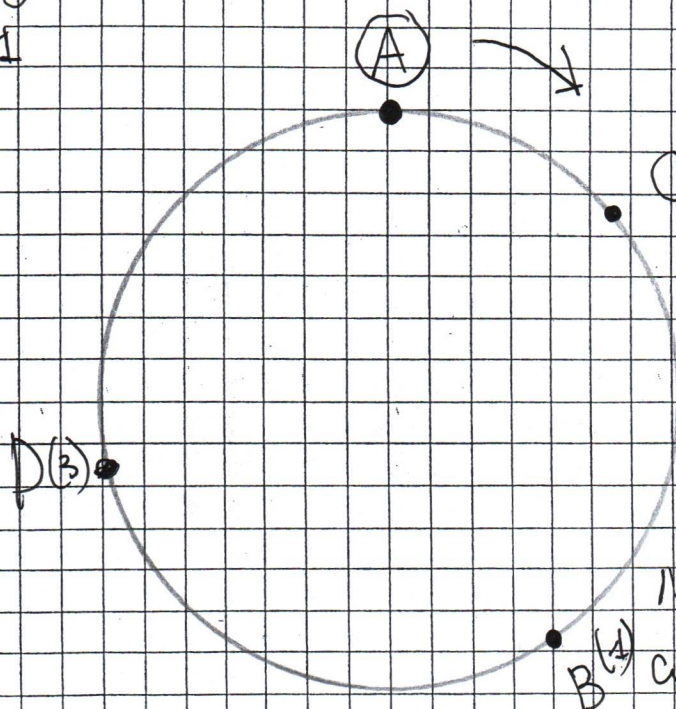
ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-02 ШИФР (заполняется оргокомитетом)
--------------	--	--

Ответ: встреча произошла в отмеченной точке.

Докажем, что при встрече n и n они будут в отмеченной точке индукцией по n .

База:

$n=1$



Пусть они старто-
по часовой стрелке
с(2) вали из т. А
и встретились в
первый раз в
точке В.

После этого мед-
ленный развернул-
ся и они встрети-
лись второй раз в точке С.

После этого
они будут бежать из одной точки С против
часовой стрелки с теми же скоростями $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ быстрый догонит медленного в точке D
на том же расстоянии от С, что и от А
до В $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (т.к. быстрый
бежит в одну сторону, т. встречи будет
также по одну сторону)

Тое из точки D они побегут в разные стороны, причём быстрый - против часовой стрелки $\Rightarrow$ они встретятся в такой точке X, что $\vec{BC} = \vec{XD}$
 $\parallel$
 $\vec{AB}$

$\Rightarrow A = X \Rightarrow$ встреча № 4.1 была в A

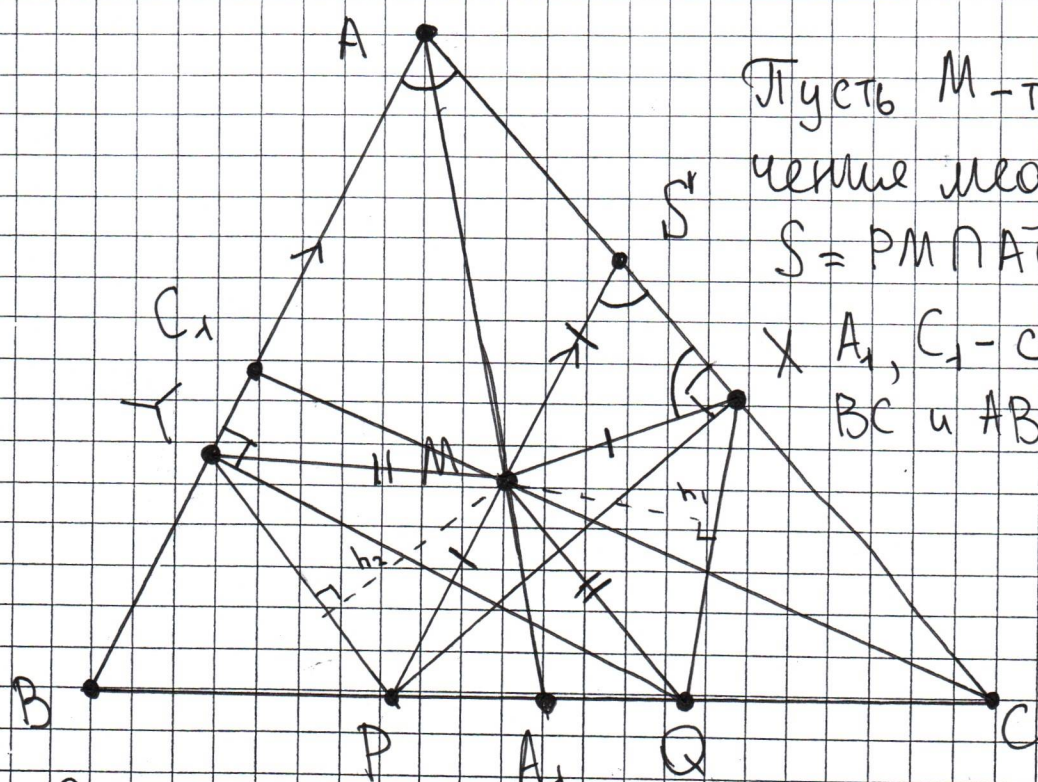
Переход $n \rightarrow n+1$:

Пусть ~~также~~ ~~встр~~ встреча № 4n была в точке A. Тогда применим рассуждения из базы и получим, что встреча № 4(n+1) была в т. A

Т.к. $100 : 4$, встреча № 100 была в т. A

7 баллов Балл

ЗАДАЧА № 9.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-02 ШПФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	---	--



Пусть M - т. пересечения медиан $\triangle ABC$,
 $S = PM \cap AC$

$\times A_1, C_1$ - середины BC и AB соотв.

Заметим, что $\frac{A_1P}{PB} = \frac{A_1M}{AM} = 1:2 \Rightarrow PM \parallel BA$
 (поэтому т. S существует)

($\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QC}$ и $BA_1 = CA_1$ и $BP = QC \Rightarrow PA_1 = QA_1 = \frac{PQ}{2} = \frac{PB}{2}$;
 $A_1M/AM = 1:2$, т.к. M - т. пересечения медиан)

Заметим, что $\frac{CM}{CC_1} = \frac{2}{3}$ (т.к. M - т. пересечения медиан) $= \frac{CP}{BC}$ (т.к. $BC = BP + PQ + QC = 3 \cdot \frac{CP}{2}$), а
 также $\angle MCP = \angle C_1CB \Rightarrow \triangle CMP \sim \triangle CC_1B \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC_1 \Rightarrow PM = \frac{2}{3} BC_1 = \frac{2}{3} AC_1 = SM$

доказывает аналогично как
 и $\frac{2}{3} BC_1 = PM$

$\Rightarrow PM = SM \Rightarrow M$ - середина гипотенузы PS в $\triangle PMS \Rightarrow$

$$\Rightarrow XM = MP = MS$$

Аналогично $YM = MQ$

$$\text{Заметим, что } \angle PMX = \angle PSX + \angle MXS = 2\angle PSX = \\ = 2\angle PSC = 2\angle BAC \text{ (т.к. } PS \parallel BA) \Rightarrow$$

Аналогично $\angle QMY = 2\angle BAC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle PMX = \angle QMY \Rightarrow \angle YMP = \angle QMX$$

Рассмотрим $\triangle PMY$ и $\triangle XMQ$:

$$PM = XM$$

$$YM = QM = YM \quad YM = QM$$

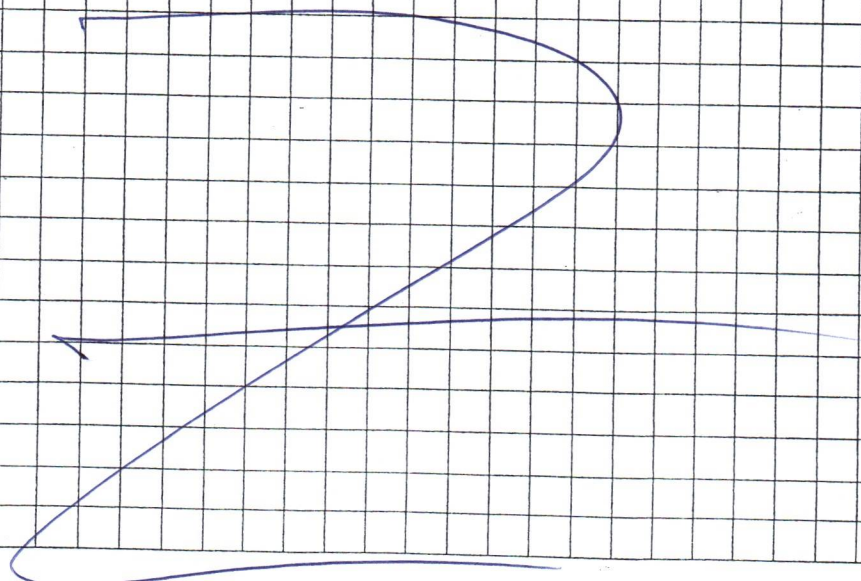
$$\angle PMY = \angle XMQ$$

$$\Rightarrow \triangle PMY = \triangle XMQ$$

по 1-му пр.



$h_1 = h_2$ как высоты
в равных $\triangle$ -ах
4mg.



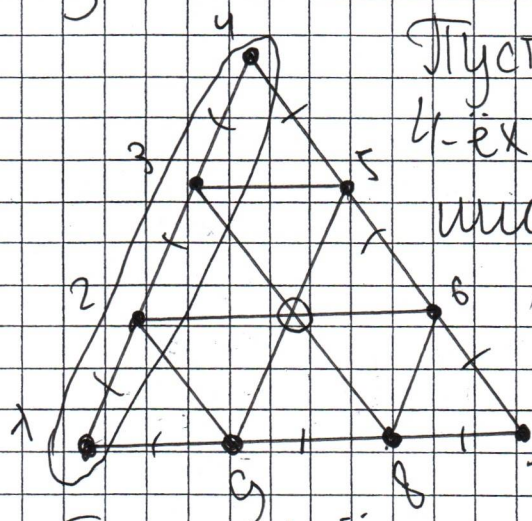
ЗАДАЧА № 9.9	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-02 ШПФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	--	---

Ответ: ~~2^{3n^2}~~

Ответ: $2^{3 \cdot 3 \cdot 7^2}$

Докажем, что для треугольника со стороной $3n$ ответ будет 2^{3n^2} по индукции по n :

База: $n=1$



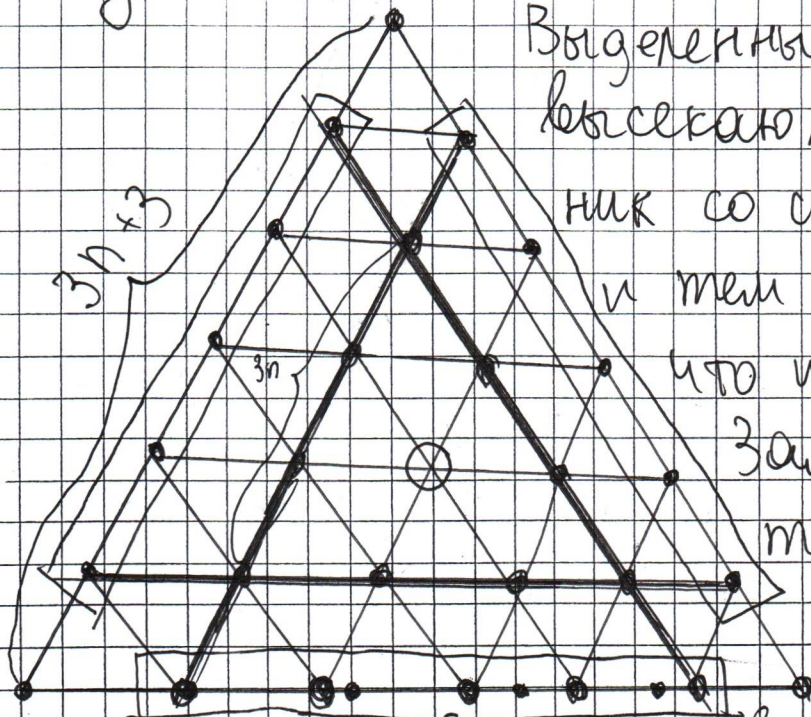
Пусть есть множество из 4-х точек. Тогда оставшееся можно разбить на 2 множества 2-мя способами (5-6-7 и 8-9 или 7-8-9 и 5-6)

Любая из 3-х сторон может быть множеством $\Rightarrow$ всего $2 \cdot 3 = 6$ разбиений если есть множество, совпадающее со стороной. Если же в каждом ≤ 3 точки, то в них ровно по 3 точки, т.к. всего точек 9, а множество 3. Тогда будет ещё 2 разбиения: 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9 и 1-9-8, 7-6-5, 4-3-2.

Всего 8 разбиений
 $\approx 2^{3 \cdot 1^2}$

ЗАДАЧА № 9.9	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	--	---

Переход $n \rightarrow n+1$:



Выделенные прямые
высекают треуголь-
ник со стороной $3n$
и тем же центром,
что и у исходного.
Заметим, что
точки не $\in$
этому Δ

могут быть либо в мн-ве выделенного
 Δ , либо в мн-ве, содержащем ^{только} точки
на стороне исходного. Множество m
точек на стороне исходного очевидно ≥ 3 ,
при этом если $m \geq 4$, то выделенный Δ
должен разбиваться на $\leq 3n-1$ мн-во, что
невозможно ~~очевидно~~. $\Rightarrow$ Таких мн-в равно
3. Заметим, что способов распределить
точки на ^{в этих 3 мн-ва} ~~гранях~~ ^{всего} 8 (рассуждение
из базы) $\Rightarrow$ при этом некоторые точки
могут ~~не~~ быть в мн-ве выделенного Δ .

ЗАДАЧА № 9.9	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-03-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	--	---

Заметим, что для разбиения выделенного Δ в n ~~каждое~~ из $3n$ множеств можно ~~можно~~ добавить от 0 до 2 граничных вершин, всего 2^2 способов для n мн-ва $\Rightarrow$ для n разбиения выделенного Δ существует $(2^{2^{3n}})^{1/2}$ способов добавить к нему какие-то из граничных вершин (при этом в граничных мн-вах все равно останется хотя бы по одной точке, т.к. в $\square$ областях ≥ 1 точка остается)

(если какая-то точка на границе может оказаться сразу в 2-х мн-вах выделенного Δ , то в выделенном Δ $> 3n$ мн-в ~~можно~~ легко пойти из индукции)

$\Rightarrow$ Все точки исходного Δ можно разбить на граничные мн-ва и мн-ва выделенного Δ ровно $8 \cdot (2^{2^{3n}})^{1/2}$ кол-во разбиений выделенного $\Delta \leq 8 \cdot 2^{3n} \cdot 2^{3n^2} = 2^{3n^2+6n+3} = 2^{3(n+1)^2}$

(Т.к. крайняя точка Δ может содержаться только в мн-ве точек на стороне, такое мн-во точно есть. Тогда можно выкинуть все эти точки

ЧТО?

и сделать переход индукции, рано или поздно останется Δ с мн-вом из одной ~~крайней~~ ~~пунктирной~~ вершины)



0 баллов Балл ✓

ЗАДАЧА № <u>9.10</u>	ЛИСТ <u>1</u> ИЗ <u>1</u>	<u>9-03-02</u>
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: нет.

Пусть n^2 и $(n+1)^2$ являются перестановочной цифрой. Тогда $n^2 \equiv (n+1)^2 \pmod{9} \Rightarrow 2n+1 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow n \equiv 4 \pmod{9}$