

Ч. Басилов

ЗАДАЧА № 10. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-01 ПППФР (заполняется оргкомитетом)
----------------	--	---

В квадрат площадью n^2 не может входить
прямоугольник размером больше $1 \times n$, поскольку
сторона такого квадрата равна n . Значит,
в такой квадрат площадью n^2 входит
не более $1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ клеток. Но:

$$n^2 - \frac{(n+1)n}{2} = n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Поскольку ~~так как~~ $n \geq 1$, то $n > 0$ и $(n-1) > 0$,
следовательно $\frac{(n-1)n}{2} > 0$, то есть $n^2 > \frac{(n+1)n}{2}$.

Значит на квадрат n^2 площади более 1
просто не хватит клеток, а следовательно
из набора Олега квадрат площади более
1 составить невозможно.

Ответ: нет, не может.

4 Бологов

ЗАДАЧА № 10.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
---------------	--	--

Пусть координаты крайней правой точки верхнего основания ~~то~~ равные $(x_1; y_1)$, а нижнего $(x_2; y_2)$.

Тогда, координаты крайних левых точек верхнего и нижнего оснований соответственно равные $(-x_1; y_1)$ и $(-x_2; y_2)$.

Тогда, произведение длин оснований равно $(x_1 - (-x_1)) \cdot (x_2 - (-x_2)) = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2$, то есть $4x_1x_2 = k$.

Пусть точка пересечения прямой, содержащей точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то есть ^{продолжения} правой боковой стороны трапеции, и оси y имеет координаты $(0; y_0)$. Треугольник с вершинами в $(x_1; y_1)$, $(x_1; y_0)$ и $(0; y_0)$ и треугольник с вершинами в $(x_2; y_2)$, $(x_2; y_0)$ и $(0; y_0)$ подобны по двум углам. Значит:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1} = \frac{y_2 - y_0}{x_2}$$

$$y_1x_2 - y_0x_2 = y_2x_1 - y_0x_1$$

$$y_0(x_1 - x_2) = y_2x_1 - y_1x_2$$

$$y_0 = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{(x_1 - x_2)}$$

Так как $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ принадлежат параболе $y = x^2$,

$$\text{то } y_1 = x_1^2 \text{ и } y_2 = x_2^2.$$

$$y_0 = \frac{x_2^2x_1 - x_1^2x_2}{(x_1 - x_2)} = \frac{x_1x_2(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_2)} = -x_1x_2$$

$$\text{Для левой боковой стороны аналогично } y_0 = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{(x_2 - x_1)} = -x_1 x_2$$

~~Но если обе боковые стороны пересекают ось y~~
~~в точке $(0; -x_1 x_2)$. Так как $4x_1 x_2 = k$, то $-x_1 x_2 = -\frac{k}{4}$,~~

~~значит~~

значит, обе продолжения боковых сторон
трапеции пересекают ось y в точке $(0; -x_1 x_2)$

Так как $4x_1 x_2 = k$, $-x_1 x_2 = -\frac{k}{4}$, значит любая y

любой такой трапеции боковые продолжения
боковых сторон проходят через точку $(0; -\frac{k}{4})$.

Обинов

ЗАДАЧА № 10.3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-05-01 ППФР (заполняется оргкомитетом)
---------------	--	--

Ответ: 50

Пример:

Начиная с какой-то точки, пронумеруем точки по часовой стрелке от 1 до 100. Заменим все четные номера на 2, а нечетные на 1.

Разделим все точки на 50 пар соседних точек так, чтобы точки с номерами 1 ~~и~~ в каждой паре стояли первые точки с номерами 2, если считать по часовой стрелке. Зоя красит каждую точку с номерами 1. Если Боря красит соседнюю точку с этой точкой находится в одной паре одной паре; Если Боря красит точку отстоящую от соседней с этой точкой от соседа этой точки, то Зоя Зоя красит парую Бориней точке точку в противоположном цвет, создавая тем самым разноцветную пару и полностью закрашивая одну пару.

В. Басенов

ЗАДАЧА № 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-01 ШПФР (заполняется оргкомитетом)
------------	--	--

Возьмём первое число в ряду.
Для каждого $n < 501$ выполним следующее:
найдем n . Допустим, это не верно.
Возьмём первое число в ряду и
будем прибавлять набирать в набор
первым числом, каждое следующее,
пока сумма набора не будет равна
больше 100500. Тогда как у нас нет
суммы не так толще, что они не больше
100500 и более 10000, они не более 100500
и более 100000, то сумма набора без
какой-то из крайних в наборе чисел
последнее число равна 100000 или менее.
Значит, последнее число пока мы ищем
501.

76 баллов

Андрей

ЗАДАЧА № 10.6	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-02 ШИФР (заполняется оргокомитетом)
---------------	--	---

Пусть $\frac{1}{x^2+x+1} = a$. Тогда:

$$ax^2 + ax + a = 1$$

$$ax^2 + ax + (a-1) = 0$$

Это уравнение должно иметь решение
значит: в вещественных числах. Значит:

$$D \geq 0$$

$$a^2 - 4a(a-1) \geq 0$$

$$a^2 - 4a^2 + 4a \geq 0$$

$$4a - 3a^2 \geq 0$$

$$a(4 - 3a) \geq 0$$

Если $a > 0$, то:

$$4 - 3a \geq 0$$

$$-3a \geq -4$$

$$a \leq \frac{4}{3}$$

Если же $a \leq 0$, то $a \leq 0$.

Значит, $\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$. Аналогично $\frac{1}{y^2+y+1} \leq \frac{4}{3}$ и

$\frac{1}{z^2+z+1} \leq \frac{4}{3}$. Значит тогда, $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} = 4$ только

тогда, когда $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{4}{3}$. Рассмотрим

уравнение $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$.

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$$

$$OD3: x^2+x+1 \neq 0$$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 1$$

$$4x^2 + 4x + 4 = 3$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

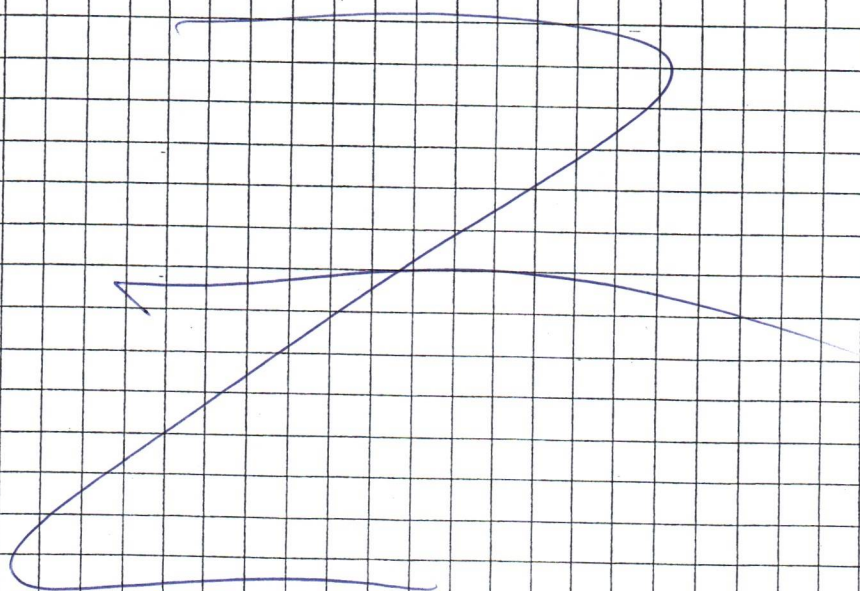
$$(2x+1)^2 = 0$$

$$2x+1=0$$

$$2x = -1$$

$x = -0,5$, следовательно, x, y и z должны
равняться одному и тому же числу, что невозмо-
жно. Значит, слова Вернее не могут быть
правдой

Ответ: нет, не могут.



7 баёлов

ЗАДАЧА № 10. 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-02 ШПФР (заполняется органом)
----------------	--	---

Отвѣт: да, да, да

Пример:

12345678900

*

12345678901

12345678902

12345678903

12345678904

12345678905

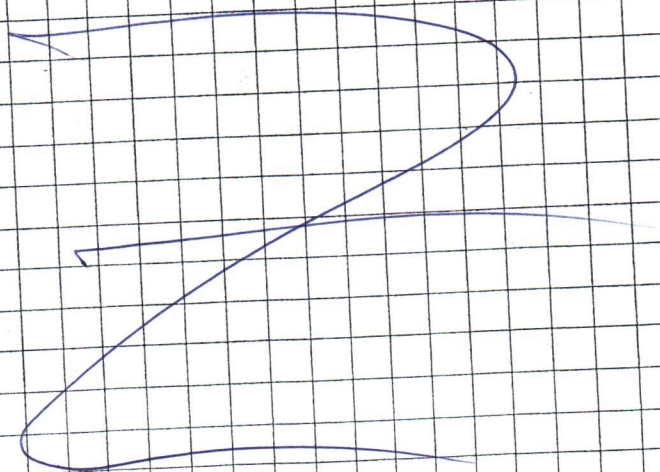
12345678906

12345678907

12345678908

12345678909

Каждая цифра встречается ровно 1 раз



У. Басов

ЗАДАЧА № 8	Лист 7 из 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-02 ШПФР (заполняется оргкомитетом)
------------	--	--

Назовем середины сторон AB , BC , CD и AD
 M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} и M_{AD} соответственно,
 Тогда, $M_{AB}M_{BC}$ - средняя линия $\triangle ABC$,
 параллельная AC , а $M_{AD}M_{CD}$ - средняя линия $\triangle ADC$,
 параллельная AC . Значит, $M_{AB}M_{BC} \parallel AC$
 и $M_{AD}M_{CD} \parallel AC$, то $M_{AB}M_{BC} \parallel M_{AD}M_{CD}$. Также,
 $M_{AB}M_{BC} = \frac{1}{2}AC = M_{AD}M_{CD}$. Таким образом $M_{AB}M_{BC} \parallel M_{AD}M_{CD}$
 и $M_{AB}M_{BC} = M_{AD}M_{CD}$, $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{AD}$ - параллело-
 грамм. Таким образом $\angle M_{AB}M_{BC}D = \angle M_{AD}M_{CD}D = 90^\circ$. Таким образом $\angle BMD = \angle BCD = 90^\circ$,
 $ABMD$ - вписанный. Тогда, $\angle ACD = \angle ABD$.
 Таким образом $AC \parallel M_{AB}M_{BC}$ и $DM \perp M_{AB}M_{BC}$, то
 $DM \perp AC$. Тогда $\angle DMC = 90 - \angle M_{BC}DC = \angle ACD =$
 $= \angle ABD$. $M_{AB}M_{AD} \parallel BD$, то $M_{AB}M_{AD}$ - средняя
 линия $\triangle ABD$. Значит, $\angle AM_{AB}M_{AD} = \angle ABD = \angle DMC$,
 а так как $\angle BMD = \angle BCD$, $\triangle AM_{AB}M_{AD} \sim \triangle CDM_{BC}$,
 по двум углам, значит $\angle AM_{AD}M_{AB} = \angle CDM_{BC}$,
 а также:

$$\frac{AM_{AB}}{AM_{AD}} = \frac{CM_{BC}}{CD}$$

$$\frac{2AM_{AB}}{AM_{AD}} = \frac{2CM_{BC}}{CD}$$

$$\frac{AB}{AM_{AD}} = \frac{BC}{CD}$$
, а так как $\angle BAD = \angle BCD$, $\triangle ABM_{AD} \sim \triangle CBD$

ЗАДАЧА № 8	ЛИСТ 2 ИЗ 2	10-07-02 ШПФР (заполняется оргкомитетом)
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	

по углу и двум сторонам. Тогда, $\angle CDB = \angle AMB$, следовательно $\angle MAB = \angle MDB$.

$\angle MAB = \angle AMB - \angle MAB = \angle CDB - \angle CDB =$
 $= \angle MBD$. Так как $MA \parallel BD$, то $\angle MAB =$
 $= \angle MBD$ как накрест лежащие. Так как
 $\angle MBD = \angle MAB = \angle MBD$, то $BM \parallel DM$,
 так как накрест лежащие углы, образован-
 ные при их пересечении равны. Так как
 $BM \parallel DM$, то пусть $BM \cap DM =$
 $= O_1$, а $DM \cap MC = O_2$. Тогда, так как
 $BM \parallel DM$, $\angle MAB = \angle MCD$ и $\angle MAB = 90^\circ$,
 то O_1, O_2, M - прямая линия, следова-
 тельно $\angle BMC = 90^\circ$. Так как $\angle BMC = 90^\circ =$
 $= \angle BCD$, четыре $\angle BMC + \angle BCD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$,
 то четырехугольник B, C, M, D вписанный,
 то есть B, C, M, D лежат
 на одной окружности.

О. Басенов

ЗАДАЧА № 9	ЛИСТ 1 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	10-07-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
------------	--	--

Ответ: $a=1, b=1, c=1$.

~~Допустим, равно~~

Решение:

Допустим, $a=b$. Тогда $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) =$
 $= \cancel{(a^2+1)(b^2+1)} (a^2+1)(c^2+1)$, а $a+bc = a+ac = a(c+1)$.

Вероятливо, если $a(c+1)$ по условию простое, то либо $a=1$, а $c+1$ простое, либо $c+1=1$, а a простое. $c+1 \neq 1$, поскольку $c \geq 1$.

$c \geq 1 \Rightarrow c+1 \geq 2$, значит $a=1$, а $c+1$ простое. Тогда $(c^2+1)(c^2+1) : (c+1)$, то есть $4(c^2+1) : (c+1)$.

Пусть $c \neq 1$. Тогда $c+1 \neq 2$, а так как $c+1$ простое, то $c+1$ нечетное, поскольку единственное простое ~~нечетное~~ ~~число~~ — это четное число — это 2. Тогда 4 и $c+1$ взаимнопросты, значит $c^2+1 : c+1$. Но $c^2-1 = (c-1)(c+1) : c+1$, а значит $(c^2+1) + (c^2-1) : c+1$, то есть $2c^2 : c+1$. Так как 2 и $c+1$ взаимнопросты, $c^2 : c+1$, что невозможно, так как c и $c+1$ взаимнопросты, следовательно c^2 и $c+1$ тоже взаимнопросты. Тогда $c=1$, то есть

$4(c^2+1):2$, что верно. Значит, $a=b=c=1$

Аналогично, если $a=c$, то $a=b=c=1$ и если $b=c$, то $a=b=c=1$. Значит, если два числа равны, то все три числа равны единице.

Пусть все числа различны. Если среди них нет единиц. Пусть среди них нет единиц.

Положим ~~числа~~ числа $a+bc$, $b+ca$ и $c+ab$ попарно различны, тогда как если $a+bc=b+ca$, то:

$$a+bc=b+ca$$

$$a-b=ca-bc$$

Так как $a \neq b$:

$1=c$, что невозможно.

Аналогично, $a+bc=a$ если $a+bc=c+ab$, то $b=1$, и если $b+ca=c+ab$, то $a=1$. Значит $a+bc$, $c+ab$ и $b+ca$ попарно различны. Тогда:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) : (a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

Значит:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

$$(a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2+1) \geq (ab+ac+bc+abc^2)(c+ab)$$

$$a^2bc^2+a^2b^2+a^2c^2+a^2+bc^2+b^2c^2+1 \geq abc+ab^2+ac^2+a^2bc+b^2c+ab^2c+abc^2+a^2bc^2$$

ЗАДАЧА № 10.9	ЛИСТ 3 ИЗ 4	10-07-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq abc + a^2bc + ab^2c + abc^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq abc(a^2 + b^2 + c^2 + 1)$$

Тогда как $a^2 + b^2 + c^2 + 1 > 0$:

$1 \geq abc$, что невозможно, так как $a > 1, b > 1$ и $c > 1$.

Значит, среди чисел есть одна единица.

Если $a = 1$, то:

$$(1^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b)$$

$$(1^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (bc + 1)$$

Если $c + b = bc + 1$, то:

$$c + b = bc + 1$$

$$bc - c - b + 1 = 0$$

$(b-1)(c-1) = 0$, значит хотя бы одно из чисел b и c равно 1, что невозможно.

Значит, $c + b \neq bc + 1$, следовательно:

$$2(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (c + b)(bc + 1)$$

значит:

$$2(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (c + b)(bc + 1)$$

Пусть $2(b^2 + 1)(c^2 + 1) > (c + b)(bc + 1)$, тогда:

$$(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (c + b)(bc + 1)$$

$$b^2c^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq bc^2 + c + b^2c + b$$

Если $(c + b) : 2$, то так как $(c + b)$ простое, $c + b = 2$,

ЗАДАЧА № 10.9	ЛИСТ 4 ИЗ 4	10-08-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	

~~то~~ а значит $c=1$ и $b=1$, что невозможно. Если $(b+1):2$, то так как $(b+1)$ простое, $b+1=2$, а значит $cb=1$, то есть $c=1$ и $b=1$, что невозможно. Тогда, $(b+c)(b+1)$ и 2 взаимно-просты, а значит:

$$(b^2+1)(c^2+1) : (b+1)(b+c)$$

Если одно число чётно, а второе нет, то $b+1$ нечётно, $b+c$ нечётно

Тогда:

$$(b^2+1)(c^2+1) \geq (b+1)(b+c)$$

Если $(b^2+1)(c^2+1)$

Значит:

$$(b^2+1)(c^2+1) \geq (b+1)(b+c)$$