7 баллов

ЗАДАЧА № 8.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-01-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да, можно:

Сначала делим 1 кусок на 2 части, получаем $1\cdot 2=2$ одинаковые части

одинакового размера

Затем делим каждый кусок на 2 части, получаем 4 части $2\cdot 2=4$

одинакового размера

Потом делим каждый кусок на 2 части, получаем

$4\cdot 2=8$ кусков одинакового размера

Затем делим каждый кусок на 11 частей,

получаем $8\cdot 11=88$ кусков одинакового размера

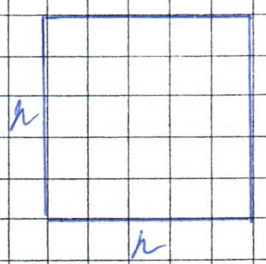
Потом делим каждый кусок на 23 части,

~~получаем~~ получаем $88\cdot 23=2024$ ~~то~~ кусков

одинакового размера, что и надо было получить

7 баллов

ЗАДАЧА № 8.2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-01 ШНФР (заполняется оргкомитетом)



Каждый квадрат содержит $n \times n = n^2$ клеток, а так же в него нельзя вставить прямоугольники $1 \times m$, где $m > n$, так как длина этого прямоугольника будет больше длины стороны квадрата, поэтому мы можем использовать только n прямоугольников (от 1×1 до ~~$n\times1$~~ $1\times n$) для создания задуманного квадрата $\Rightarrow$ сумма площадей прямоугольников (от 1×1 до $1\times n$) должна быть равна площади создаваемого квадрата. Суммарная площадь таких прямоугольников будет составлять $1\times1 + 1\cdot2 + 1\cdot3 + \ldots + 1\cdot n = S_{пр} =$
$= \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{n \text{ чисел}}$, где n – наибольшая площадь.

Теперь рассмотрим площадь квадрата:

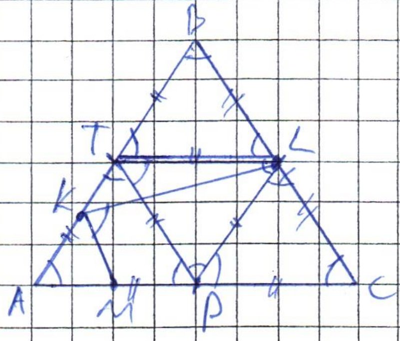
$S_{кв} = n^2 = n \cdot n = \underbrace{n+n+n+\ldots+n}_{n \text{ чисел}}$. Теперь сравним площади:

$$\left.\begin{matrix} 1 < n \\ 2 < n \\ 3 < n \\ \ldots \\ n = n \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{кв} > S_{пр} \Rightarrow$$ ~~такой~~ квадрат составить не получится

Ответ: нет

0 баллов

ЗАДАЧА № 8.3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано: $\triangle ABC$ - равносторонний; $K \in AB$; $AK=1$; $L \in BC$; $BL=2$; $M \in AC$; $CM=3$; $\angle MKL = 60°$

Найти: сторону $\triangle ABC$

Решение:

Проведем 3 отрезка: $TL \mid TL \parallel AC$; $L \in TL$

$LP \mid LP \parallel AB$; $\cancel{LP}\ P \in LP$

$TP \mid TP \parallel BC$

$\angle BTL = \angle A$ (соот. при $AC \parallel TL$ и сек AB) $= 60°$

$\angle BLT = \angle C$ (соот. при $AC \parallel TL$ и сек. BC) $= 60$ $\Rightarrow \angle BTL = \angle BLT = \angle B$

$\Downarrow$

$\triangle BTL$ - р/с

$BT = BL = TL = 2 \Leftarrow$ (равносторонний)

$\angle CLP = \angle \cancel{CPL}\ B$ (соот. при $LP \parallel AB$ и сек. BC) $= 60°$

$\angle LPC = \angle A$ (соот. при $LP \parallel AB$ и сек. AC) $= 60°$

$\angle ATP = \angle B$ (соот. при $TP \parallel BC$ и сек AB) $= 60°$

$\angle APT = \angle C$ (соот. при $TP \parallel BC$ и сек. AC) $= 60°$, тогда

$\angle TPL = \angle PTL = \angle TLP = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (смежн.) $\Rightarrow \triangle PTL$ - р/с

$\Downarrow$

$TL = TP = LP = 2$

$\angle ATP = \angle \cancel{T}PA = \angle A = 60°$ (см. выше) $\Rightarrow \triangle ATP$ - р/с $\Rightarrow$ $AT = TP = 2$

$AC = BC = AB = TB + AT = 2+2 = 4 \Leftarrow$ $TB = 2$ (см. выше)

Ответ: 4

О Баимов

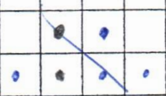
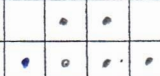
ЗАДАЧА № 8.4	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим, что Боря и Аня за один ход могут создавать от одно 2-х пар точек, которые их устраивают. Чтобы сделать 2 пары, нужно ~~чтобы~~ между двух одинаково раскрашенных точек поставить выгодную тебе, но для такого исхода нужно, чтобы либо кто-то до этого ~~поставил~~ раскрасил точку, которая не соприкасается с другими раскрашенными, но это не выгодно, так как среднее арифметическое соприкосновения с выгодными точками будет равно $\frac{2+0}{2}=1$, чего можно просто достичь, ~~ставя~~ раскрашивая точки рядом с закрашенными выгодно для тебя. Вторая причина этого исхода — это то, что данный ход 100-ый, то есть Бори, значит, на 99-м ходу Аня закрасила рядом стоящую с нужной клетку или другую, но тогда она этим ходом тоже составила 2 выгодные себе пары, иначе ~~нело~~ непонятно, почему она не использовала ту ~~клетку~~, точку, которую потом закрасил Боря.

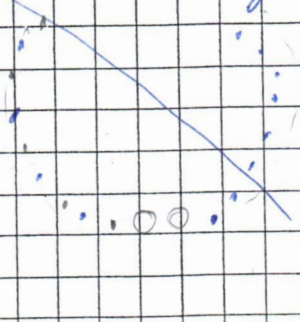
Продолжение на следующей странице

ЗАДАЧА № 8.4	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-01 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим случай, где Аня первым ходом закрашивает точку, а все остальные ходы Аня и Боря закрашивают точки только рядом с закрашенными:


(• - красная точка)


Заметим, что так как Аня каждый свой ход меняет цвет одной из крайних точек, то если считать ходы Ани нечётными (1-й; 3-й; 5-й;...), а Бори — чётными (2-й; 4-й; 6-й;...), то можно заметить, что после хода, $\equiv 0 \pmod{4}$, крайние клетки ~~одинаковые~~ разные, а после хода, $\equiv 2 \pmod{4}$, крайние клетки ~~разные~~ одинаковые, тогда позиция после 98-го ~~хода~~ будет такой (показываются только 2 незакрашенные и 2 закрашенные, стоящие рядом с ними клетки:



• ○ ○ • или • ○ ○ •, где ○ - незакрашенная клетка

(ход Ани)

Следующий ход: • • ○ • или • • ○ • (ход Бори). Далее Боря создаст 2 пары: выгодную для себя и выгодную для Ани

Продолжение на следующей странице

ЗАДАЧА № 8. 4	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-01 ШШФР (заполняется оргкомитетом)

Итоговый счёт: 50 „различных" пар и 50 „одинаковых"
Это результат при оптимальной игре, т.к.
при ~~создании~~ закрашивании к „обособленной"
точки для получения 2 выгодных пар
Среднее арифметическое выгодных пар за
2 хода всё равно $\frac{2+0}{2}=1$

Ответ: 50

О баллов

ЗАДАЧА № 8.5	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-01-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$a^2+2023b^2-2024c^2=a^2-c^2+2023(b^2-c^2)=(a-c)(a+c)+2023(b-c)(b+c)$

Таким способом можно представить множество натуральных чисел. Если числа по модулю различны, то это может быть любое натуральное число, большее 2022, а если $|b|=|c|$, то это число $(a-c)(\underbrace{a+c}_{\geq 1})$, если $|a|=|c|$, то это число $2023(\underbrace{b^2-c^2}_{\geq 2023})$, ~~если~~ $=2023(a-b)(a+b)$, если $|a|=|b|$, то этот число $(a^2-c^2)+2023(b^2-c^2)=$

$=(a^2-c^2)+2023(a^2-c^2)=2024(a-c)(a+c)\geq 2024$

7 баллов

ЗАДАЧА № 8.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть наименьшее число из последовательности $= x$, тогда если в уравнении

$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = (x+4) + (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) + (x+10) + (x+11) + (x+12) + (x+13) + (x+14)$

$x \in Z$, то такая последовательность существует

Решим уравнение:

$4x + 6 = 11x + 99$

$7x = -93$

$x = -\frac{93}{7} \notin Z \Rightarrow$ такой последовательности не существует.

Ответ: нет

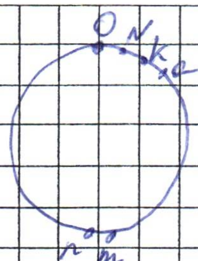
7 баллов

ЗАДАЧА № 8.7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Могли, приведём пример:
числа от 10234567890 до 10234567899 включительно,
каждая цифра встречается по 11 раз
(в $\overline{1023456789n}$ на месте n стоит каждая цифра по 1 разу, а в части 1023456789... присутствует каждая цифра, и в каждом из чисел примера их порядок и количество не изменяется)

2 балла

ЗАДАЧА № 8.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Будем рассматривать окружность, на „вершине“ которой стоит 0, а справа и слева от него стоит по $\frac{2023-1}{2}=1011$ чисел.

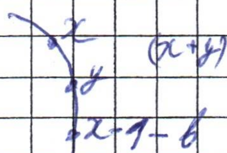
Заметим, что N должно стоять рядом с 0, так как в точках n и m, б стоят числа, сумма которых отличается от $0+N$ на 1, и чтобы найти N наибольшую, нам нужно, чтобы разница между N и m или n была наибольшей, так как если N стоит рядом с нулём, то число ~~рядом~~ с другой стороны от N, $k\le 1$, чтобы условие не нарушалось, а с другой стороны от единицы должно стоять число $a\le N+1$, и так далее („большие“ числа будут уменьшаться, а „маленькие“ увеличиваться, так как n и m — „большие“ числа $\Rightarrow m-1\le n\le m+1$, $n-1\le m\le n+1$ $m\approx n\approx\frac{N}{2}$ (±1))

Так же, если „большие“ числа будут постепенно уменьшаться на 1, то ~~N-n~~ и $N-m$ будут наибольшими $\Rightarrow N$ будет наибольшим (см. рассуждение в ~~скобке~~ ~~последних~~ скобках).

„Большие“ числа уменьшаются не более

ЗАДАЧА № 8.8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

чем на 1, так как если бы они уменьшались



$(\cancel{b\in}\ b>0)$

$(x+y)$ больше $(x-1-b)$ на $1+b$

$1+b>1$ (не соответствует условию задачи)

то разница между суммами была бы больше 1 (см. рисунок слева)

Теперь посчитаем максимальную разницу между N и m: кол-во „больших чисел" в правой половине круга $=506 \Rightarrow$ кол-во уменьшений $=$ $=506-1=505 \Rightarrow$ наибольшее $N-m=505\cdot 1=505$, тогда ~~$N_{наиб}=m$~~. если $m \approx \frac{N}{2}$, то

$$\begin{cases} 2m+\cancel{x}^{1}=N \\ N-m=505 \,|\cdot 2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} \cancel{2m+1=}\ N-2m=1 \\ 2N-2m=1010 \end{cases}$$

$N=1011$, тогда $m=506$.

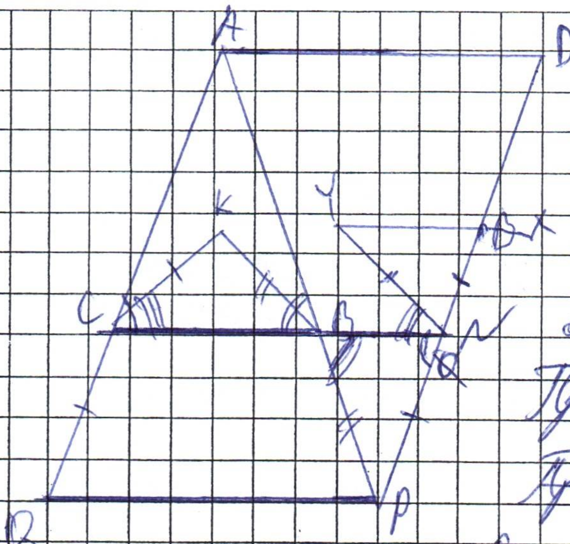
Если слева от 0 стоит тоже N, то ~~все~~ условие выполняется

Если бы N было больше, то если m и n $=\frac{N}{2}+c$ $(c\geq 0)$, что невозможно, так как N уменьшается не больше чем на 505, что в этом случае не происходит, тогда $N_{наиб}=1011$

Ответ: 1011

О баллов

ЗАДАЧА № 8.9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-01-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано: $\angle KCB+\angle ACB=\angle KBC+\angle ABC=120^\circ$;

$BK=BP$; $CK=CQ$

Док-ть: $BQ=CP$

Док-во:

~~Проведём AD | AD = QP; AD ∥ QP ⇒ ADPQ - # (по опр.)~~

~~Проведём CN ∥ QP, тогда~~

~~Продлим CB до DP тогда~~

~~$\triangle ACB \sim \triangle BNP \Leftarrow \begin{cases} \angle ABC=\angle NBP \text{ (верт.)} \\ \angle PNC=\angle ACB \text{ (внутр. при } AQ \parallel DB \text{ и сек. } CN) \\ \angle QAP=\angle APD \text{ (внутр. при } QA \parallel DP \text{ и сек. } AP) \end{cases}$~~

~~$CQ \parallel DN$; $CN \parallel QP \Rightarrow CNPQ$ - #~~

~~$PN = CQ$ (1 св. #), тогда если продлить CB до DP, то, поскольку~~

~~$\frac{AC}{NP} = \frac{AB}{}$ $CB \cap DP = O$, то~~

Отложим на BN отрезок, $= CQ$

От отрезка CN в точке N отложим угол, $=\angle KCB$ и на нём отложим отрезок, равный CK

Заметим, что $XN = NP = YN \Rightarrow \angle PYX = 90^\circ \Rightarrow \angle NYP = 30^\circ$

$\triangle YNP$ - р/б $\Rightarrow \angle YPN = 30^\circ$ тоже $\Rightarrow \angle YNP = 120^\circ \Rightarrow \angle CNP = \angle NCA \Rightarrow CN$ совпадает с $CB \Rightarrow CB \parallel QP \Leftarrow QCBP$ - трапеция

$\triangle AQP \sim \triangle ACB \Rightarrow BQ = CP$