

ЗАДАЧА № 8.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-10-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Решение:

Разложим число "2024" на простые множители:

$$\begin{array}{r|l}
 2024 & 2 \\
 1012 & 2 \\
 506 & 2 \\
 253 & 11 \\
 23 & 23 \\
 1 &
 \end{array}$$

Заметим, что в разложении числа "2024" участвуют только числа "2", "11", "23", а значит, можно число ~~"2024"~~ мы сможем получить 2024 одинаковых по весу кусков сыра из 1-го, вычитая указанные в условии задан операции (т.е. сначала разделим 1 кусок сыра на 23 одинаковых по весу, затем каждый из 23 кусков разделим на 11 одинаковых по весу, затем каждый из 253 полученных кусков разделим на 2 одинаковых по весу, затем каждый из 506 полученных кусков разделим на 2 одинаковых по весу, и наконец, каждый из 1012 полученных кусков сыра разделим на 2 одинаковых по весу, и тогда получится 2024 куска сыра, одинаковых по весу).

Ответ: да, можно.

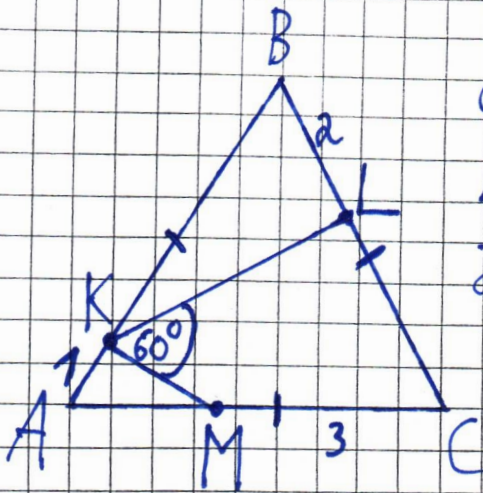
О Башев

ЗАДАЧА № 8.2	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-10-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Решение:

И.к. квадрат должен быть площадью больше чем 1, то площадь квадрата будет минимум $2 \cdot 2$. Заметим, что в квадрат $2 \cdot 2$ не поместятся прямоугольнички, размер которых больше чем $1 \cdot 2$; в квадрат $3 \cdot 3$ — размер которых больше чем $1 \cdot 3$ и т.д. Это есть, например, в квадрат $2 \cdot 2$ поместятся только прямоугольнички $1 \cdot 2$ и $1 \cdot 1$; в квадрат $3 \cdot 3$ — $1 \cdot 3$, $1 \cdot 2$ и $1 \cdot 1$ и т.д. Давайте ~~сразу~~ посчитаем площадь ~~этих~~ квадратов в клеточках: для $2 \cdot 2$ — 4 клеточки; для $3 \cdot 3$ — 9 клеточек и т.д., а сумма клеточек прямоугольничков, которые помещаются в данные квадраты будет меньше, чем вся площадь этих квадратов (для $2 \cdot 2$ — $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$, а $S = 4$; для $3 \cdot 3$ — $1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 + 2 + 1 = 6$, а $S = 9$ и т.д.) \Rightarrow Значит Олег не сможет составить из данных клетчатый квадрат, площадь которого больше 10, из своих клетчатых прямоугольничков.

Ответ: Нет, не сможет.



Дано: $\triangle ABC$ — равносторонний;
 $AK=1$; $BL=2$; $MC=3$; $\angle MKL=60^\circ$.
 Найти: сторону $\triangle ABC$.

Решение:

П.к. $\triangle ABC$ — равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

$\angle AKB$ — развёрнутый, значит $\angle BKL + 60^\circ + \angle AKM = 180^\circ \Rightarrow \angle BKL + \angle AKM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

$\angle BKL + \angle KLB + \angle B = 180^\circ$ (по сумме углов $\triangle KLB$) \Rightarrow

$\Rightarrow \angle BKL + \angle KLB = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

П.к. $\angle BKL + \angle AKM = 120^\circ$ и $\angle BKL + \angle KLB = 120^\circ$, то $\angle AKM = \angle KLB$;

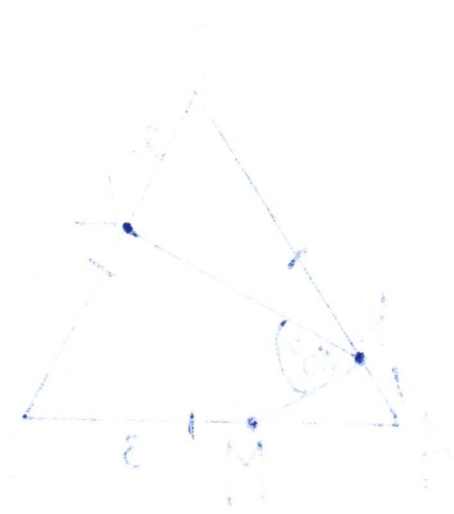
В $\triangle BKL$ и $\triangle AKM$:

1. $\angle B = \angle A = 60^\circ$ (п.к. $\triangle ABC$ — равносторонний)

2. $\angle AKM = \angle KLB$, а значит, что $\triangle BKL \sim \triangle AKM$ (по 2-м углам). П.к. $\triangle BKL \sim \triangle AKM$, то $\frac{BL}{AK} = \frac{LK}{KM} = \frac{BK}{AM}$; \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{BL}{AK} = \frac{BK}{AM}$; $\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{BK}{AM}$; $\Rightarrow BK = 2AM$; $AB = AC$ (п.к. $\triangle ABC$ — равносторонний) $\Rightarrow AK + KB = AM + MC$; $1 + KB = AM + 3$;
 Пусть $AM = x$, тогда $BK = 2x$ (п.к. $BK = 2AM$);

1. The first part of the proof is to show that the three altitudes of a triangle are concurrent.



2. The second part of the proof is to show that the three medians of a triangle are concurrent.

3. The third part of the proof is to show that the three angle bisectors of a triangle are concurrent.

4. The fourth part of the proof is to show that the three perpendicular bisectors of a triangle are concurrent.

5. The fifth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the midpoints of the opposite sides are concurrent.

6. The sixth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the orthocenter are concurrent.

7. The seventh part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the circumcenter are concurrent.

8. The eighth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the centroid are concurrent.

9. The ninth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the orthocenter are concurrent.

10. The tenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the circumcenter are concurrent.

11. The eleventh part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the centroid are concurrent.

12. The twelfth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the orthocenter are concurrent.

13. The thirteenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the circumcenter are concurrent.

14. The fourteenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the centroid are concurrent.

15. The fifteenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the orthocenter are concurrent.

16. The sixteenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the circumcenter are concurrent.

17. The seventeenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the centroid are concurrent.

18. The eighteenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the orthocenter are concurrent.

19. The nineteenth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the circumcenter are concurrent.

20. The twentieth part of the proof is to show that the three lines connecting the vertices of a triangle to the centroid are concurrent.

Составим и решим уравнение:

$$1 + 2x = x + 3;$$

$$2x - x = 3 - 1;$$

$$x = 2.$$

$$AM = x = 2;$$

$$AC = AM + MC = 2 + 3 = 5;$$

AC — сторона $\triangle ABC$.

Ответ: 5.

О. Башков

ЗАДАЧА № 8.5	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-10-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Решение:

$$\begin{aligned} a^2 + 2023b^2 - 2024c^2 &= a^2 + 2023b^2 - 2024c^2 + b^2 - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2023b^2 + b^2 - 2024c^2 = a^2 - b^2 + 2024b^2 - 2024c^2 \\ &= (a-b)(a+b) + 2024(b-c)(b+c); \\ \text{Ответ: } &(a-b)(a+b) + 2024(b-c)(b+c). \end{aligned}$$

7. Баллов

ЗАДАЧА № 8.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-10-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Решение:

Предположим, что такое возможно. Пусть наименьшее из таких чисел будет k , тогда следующее идущее за ним число будет $k+1$, дальше будет $k+2$ и т.д. до $k+14$ включительно.

Сумма 4-х наименьших будет равна: $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)$, а также, по предположению, она будет равна сумме 11-ти остальных чисел: $(k+4)+(k+5)+(k+6)+\dots+(k+13)+(k+14)$.

Составим и решим уравнение:

$$k+(k+1)+(k+2)+(k+3)=(k+4)+(k+5)+(k+6)+\dots+(k+14);$$

$$k+k+1+k+2+k+3=k+4+k+5+k+6+\dots+k+14;$$

$$4k+6=11k+99;$$

$$4k-11k=99-6;$$

$$-7k=93;$$

$$k=\frac{-93}{-7};$$

$$k=-13\frac{2}{7}.$$

У нас получилось, что наименьшее из этих чисел равно $-13\frac{2}{7}$, но по условию сказано, что все эти числа — целые. Мы получили противоречие, а это значит, что таких чисел не найдётся.

Ответ: нет, не найдётся.

Handwritten title or header text.

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

Handwritten text block on the right side of the page, possibly a signature or a specific note.

Handwritten text at the bottom of the page, including what appears to be a date and possibly a name.

У. Башов Р.

ЗАДАЧА № 8. 7	Лист 1 из 1	8-10-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Решение:

Да, ~~можно~~ слова ~~степи~~ могут оказаться правдой, вот пример:

- 1) 12345678900
- 2) 12345678901
- 3) 12345678902
- 4) 12345678903
- 5) 12345678904
- 6) 12345678905
- 7) 12345678906
- 8) 12345678907
- 9) 12345678908
- 10) 12345678909

Итого: 11 цифр каждого вида.

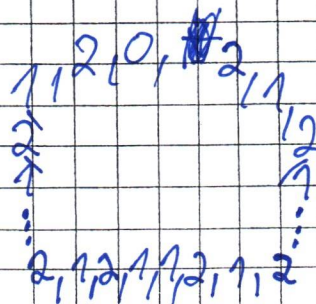
Ответ: да, можно.

О Башев

ЗАДАЧА № 8.8	ЛИСТ 1 ИЗ 1	P-10-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим:

Сначала напишем число 0; затем слева от него напишем наше число N ; следом за N , обязательно, добавим нули столько, т.к. если будет сумма $2n$, то: $0 + N = N$; $N + 2 \geq N$ на 2, что противоречит условию. Таким образом получим цикл в обе стороны круга: $\dots 1, N, 0, N, 1, N, 1 \dots$ Теперь найдем наибольшее N . Т.к. всего у нас 2023 числа, а одно из них — 0, то на N и 1 по кругу приходится $\frac{2023-1}{2} = 1011$ чисел; также если мы начнем с N , то на обратной от нуля ~~стороне~~ части круга наш цикл закончится 2-мя единицами — их сумма равна 2-ум. Т.е. наибольшее N , которое не противоречит условию = 2 (т.к. если $N =$ сумма $2n$ 3-ей, то сумма $3n - 1 = 4$, а сумма 2-ух единиц = 2; не получается от 2 на 2). Вот пример с двойкой:



Ответ: наибольшее $N = 2$.