

2024

7 башинов

ЗАДАЧА № 2.	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-02-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШПФР (заполняется оргкомитетом)

Посмотрим на квадрат со стороной a . В него можно поставить прямоугольники размером не больше чем $1 \times a$ (прямоугольник $1 \times (a+1)$ по-просту не влезет). Таким образом в квадрат со стороной a можно поставить не более чем a прямоугольников: $1 \times a, 1 \times (a-1), 1 \times (a-2), \dots, 1 \times 1$.
 Посмотрим на сумму площадей этих прямоугольников — она будет равна $\frac{a(a+1)}{2}$, а площадь квадрата равна a^2 .
 Докажем, что $a^2 > \frac{a(a+1)}{2}$ при $a > 1$. Для этого составим разность и докажем, что она > 0 .

$$a^2 - \frac{a(a+1)}{2} = \frac{2a^2 - a^2 - a}{2} = \frac{a^2 - a}{2}$$
 Знаменатель > 0 , $\Rightarrow$ дробь > 0 тогда, когда числитель > 0 .
 $2a^2 - a^2 - a = a^2 - a = a(a-1) > 0$ действительно, верно при $a > 1$, т.к. в таком случае $a > 0$, $(a-1) > 0$, $\Rightarrow a(a-1) > 0$.
 Таким образом возникает против-ие, т.к. площадь квадрата всегда больше площади, которой можно заполнить в нём прямоугольниками.
 $\Rightarrow$ нет, Олег не сможет.

Г. Башов

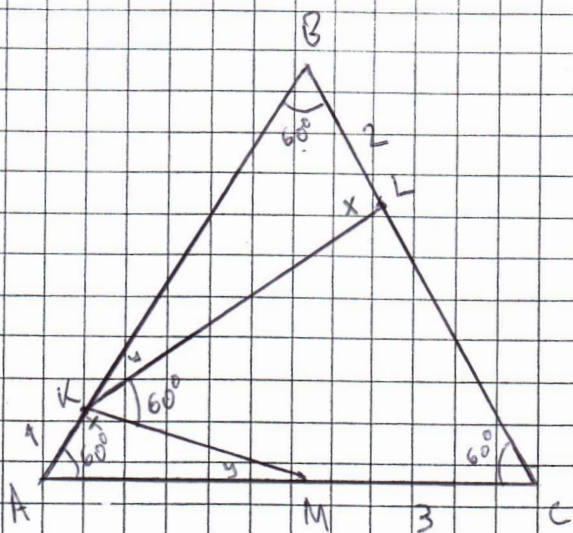
ЗАДАЧА №3.

ЛИСТ 1 ИЗ 1

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

8-02-01

ШПФР (заполняется оргкомитетом)



Решение:

• Обозначим $\angle AKM = x$, $\angle BKL = y$.

Тогда $\angle BLK = x$, т.к. внешний $\angle$ $\triangle BKL$ - угол LKA равен $60^\circ + x$,

$\angle KBL = 60^\circ$, $\Rightarrow \angle BLK = x$

1) $\triangle AKM$ и $\triangle BKL$:

a) $\angle KAM = \angle LBK = 60^\circ$

b) $\angle AKM = \angle BKL = x$

$\Rightarrow \triangle AKM \sim \triangle BKL$ (по I признаку)

$$\Rightarrow \frac{KB}{MA} = \frac{KL}{MK} = \frac{BL}{AK} = \frac{2}{1}, \Rightarrow KB = 2MA$$

2) $AB = AK + KB = AK + 2MA$, $AB = AC$ ($\triangle ABC$ - р/с), $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AK + 2MA = \cancel{AK} + MC + MA$, $\Rightarrow MC = AK + MA$

$MC = 3$, $AK = 1$, $\Rightarrow MA = 2$, $\Rightarrow$ т.к. $KB = 2MA$ $KB = 4$,

$AB = AK + KB = 1 + 4 = 5$

Ответ: 5

ЗАДАЧА № 4.	ЛИСТ 1 ИЗ 3	8-02-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШПФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: 50. Не хочется делать сложных вещей, поэтому давайте представим 2 стратегии: для Ани и для Бори, у Ани она будет гарантированно давать 50 пар с разноцветными точками, а Боря 50 пар с ^{первым} ^{ходом} одинаковыми точками. Стратегия Бори: пусть Аня ^{первым} ^{ходом} пойдет, скажем, не умоляя общности синим цветом (под словом ходим подразумевается запрашивать ~~какую-то~~ точку) в какую-то точку. Тогда Боря пойдет с противоположной точкой тем же цветом.

В таком случае сложность разветвится уже запрашиваемыми точками, поэтому "развернем" её на плоскость:

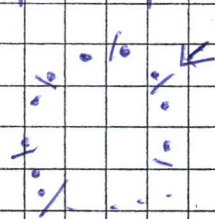
С --- С. Далее Боря раздает 98 незапрашиваемых

точек на пары идущие пары: $\underbrace{1 \dots 1 \dots 1 \dots 1}_{98}$ С

И после хода Ани в одну из клеток пары Боря ходит во вторую клетку пары тем же цветом, что и Аня. По своему цвету четное количество Борю делает последний ход. Таких пар 49, значит Боря обеспечивает себе 49 пар с точками одинакового цвета + 1 пара которую он сделал в самом начале своим ходом, итого: 50. Продолжение решения на следующей странице →

ЗАДАЧА № 4.	ЛИСТ 2 ИЗ 3	8-02-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

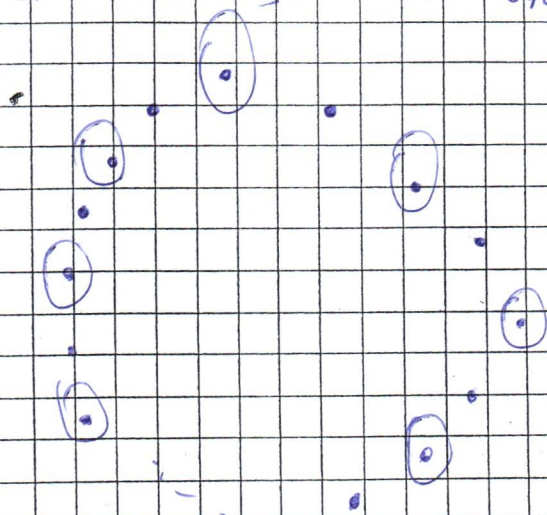
Стратегия Ани: Разбивает все точки на 50 пересекающихся пар. Аня ставит (красит) синим цветом любую точку. После хода Бори красит точку, стоящую через 1 от уже закрашенной, в противоположной уже закрашенной последней точке, закрашенной Аней, в цвет противоположной цвету последней закрашенной Аней. Случай, если это сделан своим ходом Боря, разберём позже. Введём понятие "стеночка" пары:



Тогда при ходе В между закрашенными в против-ты мы (Аня) играем Гара оказывается с точками против-ых цветов) в одной паре: либо в обычной, либо по середине которой "стеночка". (Проще говоря К.С. - ситуация, когда наши цветом не закрасть точку по середине, будет 1 пара разноцветная). Обычных пар (на которое мы разделили) 50, пар со "стеночкой" по середине 50, так что Аня обеспечивает хотя бы 50 пар "разноцветных". Теперь разберём случаи, когда через одну ~~любую~~ точку от последней, закрашенной Аней, закрашит Боря. В малом случае Аня ходит в ~~любую~~ ^{точку} "между" цветом, противоположным одной из точек соседей,

ЗАДАЧА № <u>И</u> .	ЛИСТ 3 ИЗ 3	8-02-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШПФР (заполняется оргкомитетом)

таким образом обеспечивая себе еще одну "разноцветную"
 кару. Далее продолжает действовать по изначальной стратегии,
 крадя в противоположный цвет ~~и~~ точку через одну
 от той, которую она собиралась закрасть, но которую
 закрастил Боря. После этого выбирает точки как показано
 ниже и действует по описанной стратегии.



4 балла
4 балла
продол

ЗАДАЧА № 6	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	8-02-02 III IPR (заполняется оргкомитетом)
------------	--	--

Упорядочим числа:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$$

~~Используем свойства неравенств~~

~~Заметим, что в таком случае справедливо утверждение~~

Решим случай, когда все числа > 0 . Упорядочим

их: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n-1}$. В таком случае справедливо

утверждение $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - \dots - a_2 > 0$, т.к.

$$a_1 > a_{n-1} \Rightarrow a_1 - a_{n-1} > 0, \quad a_2 > a_{n-2} \Rightarrow a_2 - a_{n-2} > 0 \text{ и т.д. с}$$

$a_3 > a_{n-3}$ и $a_n > a_1$. Все остальные числа $(a_5; a_6; \dots; a_n) > 0$,

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n > a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2$$

~~Решим~~ Случай, когда все числа < 0 , аналогично:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n. \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} - \dots - a_2 < 0,$$

т.к. $a_1 > a_{n-1}$ и $(a_1, a_{n-1} < 0)$ $a_1 - a_{n-1} < 0$, с парами $a_2 - a_{n-2}$,

$a_3 - a_{n-3}$, $a_n - a_1$ аналогично, все ~~иные~~ остальные числа

$$(a_5; a_6; a_7; \dots; a_n) < 0, \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n < a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2.$$

Теперь разберём случай, когда какое-то из чисел $= 0$,
по свойству числа последовательные, таких случаев 15,

их можно спокойно перебрать.

Продолжение на след. стр. $\rightarrow$

ЗАДАЧА № 6. _____	ЛИСТ 2 ИЗ 2	Р-02-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

- ① $-14; -13; -12; -11; \dots, 0$ ~~Сумма~~ $S_{\text{наим.}} = -50, S_{\text{остальных}} = -55$
 ② $-13; -12; -11; -10; \dots; 0; 1$ $S_{\text{наим.}} = -46, S_{\text{остальных}} = -44$
 ③ $-12; -11; -10; -9; \dots; 0; 1; 2$ $S_{\text{наим.}} = -42, S_{\text{остальных}} = -33$
 ④ $-11; -10; -9; -8; \dots; 0; 1; 2; 3$ $S_{\text{наим.}} = -38, S_{\text{остальных}} = -22$
 ⑤ $-10; -9; -8; -7; \dots; 0; 1; 2; 3; 4$ $S_{\text{наим.}} = -34, S_{\text{остальных}} = -11$
 ⑥ $-9; -8; -7; -6; \dots; 4; 5$ $S_{\text{наим.}} = -30, S_{\text{ост.}} = 0$
 ⑦ $-8; -7; -6; -5; \dots; 5; 6$ $S_{\text{наим.}} = -26, S_{\text{ост.}} = 11$
 ⑧ $-7; -6; -5; -4; \dots; 5; 6; 7$ $S_{\text{наим.}} = -22, S_{\text{ост.}} = 22$
 ⑨ $-6; -5; -4; -3; \dots; 7; 8$ $S_{\text{наим.}} = -18, S_{\text{ост.}} = 33$
 ⑩ $-5; -4; -3; -2; \dots; 8; 9$ $S_{\text{наим.}} = -14, S_{\text{ост.}} = 44$
 ⑪ $-4; -3; -2; -1; \dots; 9; 10$ $S_{\text{наим.}} = -10, S_{\text{ост.}} = 55$
 ⑫ $-3; -2; -1; 0; \dots; 10; 11$ $S_{\text{наим.}} = -6, S_{\text{ост.}} = 66$
 ⑬ $-2; -1; 0; 1; \dots; 11; 12$ $S_{\text{наим.}} = -2, S_{\text{ост.}} = 77$
 ⑭ $-1; 0; 1; 2; \dots; 12; 13$ $S_{\text{наим.}} = 2, S_{\text{ост.}} = 88$
 ⑮ $0; 1; 2; 3; \dots; 13; 14$ $S_{\text{наим.}} = 6, S_{\text{ост.}} = 99$

Случаев удовлетворяющих условию нет

2 балла

ЗАДАЧА № 8.	ЛИСТ 1 ИЗ 1	8-02-02
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Докажем, что любые 2 числа, разделенные стоящим между ними числом отличаются не более чем на 1.

Предположим обратное. Пусть есть 3 рядом стоящих числа a_1, a_2, a_3 , скажем, что $a_1 > a_3$ и $a_1 - a_3 > 1$.

Из условия: $a_1 + a_2 - a_2 - a_3 \leq 1$, т.е. $a_1 - a_3 \leq 1$ — против.

$\Rightarrow$ любые два числа, разделенные ~~двумя~~ ^{одним} стоящим между ними, отличаются не более чем на 1. Такую

"цепочку" можно продолжать, т.е. ~~если~~ $a_1 - a_3 \leq 1$,

$a_3 - a_5 \leq 1 \Rightarrow a_1 - a_5 \leq 1$. Таким образом 0 отличается

от $\sqrt{n}$ не более чем на 506 (достигается при расстоянии ^{целое} $\sqrt{n}$ между). Пример:

