

7 баллов (уровень)

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 2	9-04-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть сторона квадрата равна n , тогда квадрат имеет размер $n \times n$.

Если прямоугольник имеет размер $1 \times n$, мы не сможем его использовать, т.к. вертикаль и горизонталь квадрата имеют размер $1 \times n$.

Если $n > 2024$ мы не сможем заполнить такой прямоугольный квадрат. Сумма площадей всех n прямоугольников $<$ площади квадрата. Допустим это не так, тогда:

$$\frac{2024(1+2024)}{2} \geq (2024+k)^2, \text{ где } k = n - 2024; k \geq 0$$

$$1012 \cdot 2025$$

$$2024 \cdot \frac{2025}{2} \geq 2024^2 + 2 \cdot 2024k + k^2$$

$$2024 \cdot 1012,5 - 2024^2 - 2 \cdot 2024k - k^2 \geq 0$$

$$\underbrace{2024(1012,5 - 2024)}_{< 0} - \underbrace{2 \cdot 2024k}_{< 0} - \underbrace{k^2}_{< 0} \geq 0$$

Получили, что такое быть не может, т.к. $n \leq 2024$; можно использовать прямоугольники $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times n$. Сумма площадей ~~всех~~ ~~прямоугольников~~ ~~должна~~ ~~быть~~ ~~=~~ ~~сум~~ ~~площади~~ ~~квадрата~~.

Продолжение на след. странице

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 2 ИЗ 2	9-04-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Проверим это:

$$\frac{n(1+n)}{2} \geq n \cdot n / 2$$

$$n^2 + n \geq 2n^2$$

$$n - n^2 \geq 0$$

$$n(1-n) \geq 0$$

~~и т.д.~~

~~и т.д.~~

$n \in [0; 1]$. По условию n — целое число, $n \geq 0$ и

$n \neq 1$. $\Rightarrow$ тогда нет $\Rightarrow$ Алл не сможет составить

клеточный квадрат из данных прямоугольников

Ответ: нет, не сможет

5 баллов *Суров*

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 1 ИЗ 1	9-04-01
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Допустим, в каждой команде был хотя бы один рыцарь. Тогда все рыцари команды А проиграют все матчи (1) команда Б, а (рыцарь) команда Б выиграют хотя бы 2х рыцарей (Р) команды А. Такого быть не может. Получили противоречие.

Значит все рыцари в одной команде. Если они в команде Б, значит то они выиграли хотя бы 2х рыцарей в команде А, а там нет рыцарей. Противоречие.

⇒ все рыцари в команде А.

По условию все рыцари из команды А проиграли все матчи из Б. Из А остались только жеребцы. Они НЕ проиграли жеребцам из Б, то есть выиграли. В команде Б никто не осталось, значит она проиграла. Команда А победила.

Ответ: победила команда А

4 балла (уроло)

ЗАДАЧА № 9.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-04-02 ШИФР (заполняется оргкомитетом)
--------------	--	---

Пусть 7 различных чисел, это числа a, b, c, d, e, f, g .

Тогда Тетя записала на доске следующие числа:

$a(10-a), b(10-b), c(10-c), d(10-d), e(10-e), f(10-f), g(10-g)$

Из них 4 ~~указанных~~ различных.

Пусть $a(10-a) \neq b(10-b) \neq c(10-c) \neq d(10-d)$

Тогда числа $e(10-e), f(10-f), g(10-g)$ равны какому-то из чисел $a(10-a), b(10-b), c(10-c), d(10-d)$.

Возьмем, что числа вида $a(10-a), b(10-b)$ и т.д. имеют одинаковые значения при 2х возможных значениях переменных, если эти 2 значения в сумме дают 10.

Пример: $\begin{cases} 8(10-8) = 2(10-2) = 16 \\ 2+8=10 \end{cases}$

Допустим $a(10-a) = e(10-e)$, тогда $e = 10-a$
 $\swarrow$ т.к. $e \neq a$ по условию

Допустим $f(10-f) = b(10-b)$, тогда $f = 10-b$
 $\swarrow$ т.к. $f \neq a, \neq e$

Допустим $g(10-g) = c(10-c)$, тогда $g = 10-c$
 $\swarrow$ т.к. $g \neq f \neq e$

По условию $a+b+c+d+e+f+g=10$

$a+b+c+d+10-a+10-b+10-c=10$

$d+30=10 \Rightarrow d=-20$ Ответ: одно из чисел $= -20$.

ЗАДАЧА № <u>9.7</u>	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	9-04-02 ШИФР (заполняется оргокомитетом)
---------------------	--	--

Рассмотрим 2 случая:

1) оба таракана движутся в одном направлении:
Пусть медленный таракан пройдёт путь x ,
тогда быстрый пройдёт путь $1-x$ (вместе
они пробежали 1 м);

2) тараканы бегут в разных направлениях:
Пусть медленный таракан пройдёт путь y ,
тогда быстрый пройдёт путь $1-y$ (аналогично
первому случаю).

Пусть изначально тараканы бегут по оси (со
знаком $+$). Движение в другую сторону будет
против оси (со знаком $-$).

Будем следить за медленным тараканом.
Изначально тараканы бегут в одну сторону.
Первый ^{медленный} таракан пройдёт путь x по оси.
Затем быстрый таракан догонит медленного,
и медленный развернется.

Следующий участок медленный таракан
пробежит против оси, пройдя в это время
путь y (бегут в разных направлениях).

Затем тараканы встретятся лицом к лицу.

Продолжение на след. листе

и быстрый таракан развернется.

Теперь оба таракана будут двигаться (в противоположных, противоположных направлениях).

Заметим, что каждая из описанных вещей, всегда чередуются $\Rightarrow$ теперь ^{медленный} таракан пройдет путь x , только уже против оси, развернется и пойдет по оси, пройдя путь y .

Заметим, что координата медленного таракана $\Rightarrow$ и быстрого не изменилась.

$x - y - x + y = 0$, то есть они в стартовой позиции (у отмеченной точки). Направление движения обоих тараканов также соответствует стартовому. Это есть каждые 4 случая (окрестья) $\Rightarrow$ каждые 4 встречи тараканы находятся в стартовой позиции.

$100 : 4 \Rightarrow$ во время своей сотой встречи тараканы будут находиться у отмеченной точки.

Ответ: тараканы во время сотой встречи будут находиться у отмеченной точки (расстояние = 0).